Exercices supplémentaires.

Exercice 1.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

(a) Dresser le tableau des variations de la fonction g.

(b) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la notera α.
Justifier que $\alpha \in [2; 3]$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

On définit également la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{(u_n)^2}$.

(a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [2; 3]$.

(c) Montrer que pour tout x de $[2; 3]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

(d) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

(e) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
En déduire que la suite (u_n) converge, vers un réel à préciser.

Exercice 2.

On pose $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ et on définit la suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
On suppose que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.
Calculer $f'(x)$ et montrer que $\forall x \in [\sqrt{2}; +\infty[$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Rappeler l'inégalité des accroissements finis.
L'utiliser pour prouver que $\forall x \in [\sqrt{2}; +\infty[$, $|f(x) - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$.

3. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$.

4. Que peut-on dire quant à la convergence de (u_n) ?
Pour quelles valeurs de n le nombre u_n est-il une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près ?

Exercice 3.

1. Démontrer que $\forall x > 0$: $\frac{1}{1+x} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

2. En déduire que $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Exercice 4.

Démontrer que :

1. $\forall x \in]0; 1[$, $\arcsin(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

3. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leqslant (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leqslant \dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}$.

Exercice 5.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.