Corrigé du DS n°7

Correction 1.

1. ⋆ Sur $]-\infty, 0[$, f est la fonction sinus, donc continue.
⋆ Sur $]0, +\infty[$, f est le produit de deux fonctions usuelles continues, donc elle est continue.
⋆ En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ par le théorème des croissances comparées
et $f(0) = 0$
Donc f est continue en 0.
Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

2. ⋆ Pour $x < 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sin(x)}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$.
Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$.
⋆ Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées, donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.
$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

Correction 2.

1. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ $\qquad W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$

$$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x) + x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

2. (a) On pose : $u(x) = \sin(x) \qquad v(x) = \cos^{n+1}(x)$
$u'(x) = \cos(x) \qquad v'(x) = (n+1)(-\sin(x))\cos^n(x)$
u et v sont $\mathcal{C}^1$ donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)\cos^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(n+1)(-\sin(x))\cos^n(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= 1\times 0 - 0\times 1 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^n(x)\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x))\cos^n(x)\mathrm{d}x \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \quad \text{par linéarité} \end{aligned}$$

(b) $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ donc $W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$
Donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et ainsi $\boxed{W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n}$.

3. (a) $\forall n, W_{n+1} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x) - \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)(\cos(x) - 1)\,\mathrm{d}x$
Or sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et $\cos(x) \leqslant 1$ donc $\cos^n(x)(\cos(x) - 1) \leqslant 0$, donc par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$.
Donc $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante}}$.
De plus, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^n(x) \geqslant 0$ donc $W_n \geqslant 0$.
De plus, $\cos^n$ est continue, et n'est pas nulle au moins en $\frac{\pi}{4}$, donc par le théorème de nullité, $W_n \neq 0$.
On a donc bien $\boxed{W_n > 0}$.

(b) (W_n) est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, et comme $W_n > 0$, on a bien $\boxed{\frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1}$.

Or d'après **2.(b)**, $\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \sim \frac{n}{n} \to 1$ donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ donc $\boxed{W_{n+1} \sim W_n}$.

4. **(a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)W_{n+1}W_n = \boxed{u_n}$

(b) (u_n) est une suite constante et $u_0 = 1W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Or $(n+1)W_nW_{n+1} \sim nW_n^2$ donc $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ donc $\boxed{W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$.

5. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n \ (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ et $W_{2n+1} = \frac{4^n \ (n!)^2}{(2n+1)!}$

Initialisation : $0! = 1$, $A^0 = 1$ et $1! = 1$, donc $\dfrac{(2 \times 0)!}{4^0 \times (0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$ et $\dfrac{4^0 \ (0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = 1 = W_1$.

Hérédité : Soit p un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vraie, c'est-à-dire $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{4^p \ (p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{4^p \ (p!)^2}{(2p+1)!}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} = W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \quad \text{d'après } \mathbf{2.(b)} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{4^p \ (p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)2(p+1)} \times \frac{(2p)!}{4^p \ (p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+2)!}{4^{p+1} \ ((p+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Et} \quad W_{2(p+1)+1} = W_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3} \times \frac{4^p \ (p!)^2}{(2p+1)!} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{2(p+1)2(p+1)}{(2p+3)(2p+2)} \times \frac{4^p \ (p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{4^{p+1} \ ((p+1)!)^2}{(2p+3)!}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que les formules sont vraies pour tout n :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n \ (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{4^n \ (n!)^2}{(2n+1)!}}$.

Correction 3.

1. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(C) &= \mathbf{P}(L)\mathbf{P}_L(C) + \mathbf{P}(\overline{L})\mathbf{P}_{\overline{L}}(C) \\
&= \tfrac{1}{3} \times 1 + \tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{5} \\
&= \tfrac{5}{15} + \tfrac{6}{15} \\
&= \boxed{\tfrac{11}{15}}
\end{aligned}$$

2. Par la formule de Bayes : $\mathbf{P}_C(\overline{L}) = \dfrac{\mathbf{P}(C \cap \overline{L})}{\mathbf{P}(C)} = \dfrac{\mathbf{P}(\overline{L})\mathbf{P}_{\overline{L}}(C)}{\frac{11}{15}} = \dfrac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{11}{15}} = \dfrac{6}{15} \times \dfrac{15}{11} = \dfrac{6}{11}$.

$\boxed{\text{Bob étant arrivé en retard, la probabilité qu'il se soit levé à l'heure est de } \tfrac{6}{11}.}$

3. **(a)** Bob répète 180 fois la même épreuve : il se rend au lycée et regarde s'il est à l'heure ou pas. Les épreuves sont indépendantes les unes des autres car l'énoncé nous dit que le retard d'un jour n'influence pas le jour suivant.
On appelle succès l'issue : « Bob arrive en retard en classe ».
Or X représente le nombre de jours où Bob arrive en retard, donc X est aussi le nombre de succès.
Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(180; \frac{11}{15}\right)}$.

Alors $\boxed{X(\Omega) = [\![0; 180]\!] \text{ et } \forall k \in X(\Omega),\ \mathbf{P}(X = k) = \binom{180}{k}(\frac{11}{15})^k(\frac{4}{15})^{180-k}}$.

(b) $E(X) = 180 \times \frac{11}{15} = \boxed{132}$ et $V(X) = 180 \times \frac{11}{15} \times \frac{4}{15} = \boxed{132 \times \frac{4}{15}}$.

(c) Si Y est le nombre de matins où Bob arrive à l'heure, alors $X+Y = 180$, donc $Y = 180-X$.
Ainsi, $E(Y) = 180 - E(X) = 48$.
Donc $\boxed{\text{en moyenne Bob peut espérer arriver à l'heure en classe 48 jours dans l'année}}$.

4. **(a)** Bob arrive en retard X fois, et perd donc $2X$ euros.
Il arrive à l'heure $180 - X$ fois, et gagne donc $1(180 - X)$ euros.
Avec le don de ses généreux camarades, le gain de Bob est donc $G = -2X + 180 - X + 80$, donc $\boxed{G = 260 - 3X}$.
Alors $E(G) = 260 - 3E(X) = 260 - 3 \times 132 = -136$.
$\boxed{\text{Bob peut s'attendre à des pertes moyennes d'environ 136 euros à la fin de l'année.}}$

(b) On note J l'événement : « Julie gagne son pari ».
Alors J est réalisé si et seulement si $40 < Y < 56$ soit $-8 < Y - 48 < 8$ soit $|Y - E(Y)| < 8$.
Or d'après l'inégalité de Bienayme-Tchebychev, $\mathbf{P}(|Y - E(Y)| \geqslant 8) \leqslant \frac{V(Y)}{8^2}$ c'est-à-dire $\mathbf{P}(\overline{J}) \leqslant \frac{V(Y)}{8^2}$ et donc $1 - \mathbf{P}(J) \leqslant \frac{V(Y)}{8^2}$.
Donc $1 - \frac{V(Y)}{8^2} \leqslant \mathbf{P}(J)$.
Or, $V(Y) = V(180 - X) = (-1)^2V(X) = 132 \times \frac{4}{15}$.
Donc $1 - \frac{V(Y)}{8^2} = 1 - \frac{132\times4}{15\times8\times8} = 1 - \frac{4\times3\times11\times4}{3\times5\times2\times4\times2\times4} = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$.
Donc $\boxed{\text{Julie a une probabilité d'au moins } \frac{9}{20} \text{ de gagner son pari}}$.

Correction 4.

1. ⋆ Le polynôme nul est nul partout, en particulier en 1, donc il est dans F.
⋆ Soient P et Q des polynômes de F, et λ un réel.

$$\begin{aligned}(P + \lambda Q)(1) &= P(1) + \lambda Q(1)\\ &= 0 + \lambda 0 \text{ car } P \text{ et } Q \text{ sont dans } F\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $P + \lambda Q$ est dans F.
Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

2. • Montrons que $F \cap G = \{0\}$.
Soit $P \in F \cap G$.
$P \in G$ donc il existe un réel μ tel que $P = \mu(X^2 + X + 1)$.
Or $P \in F$ donc $P(1) = 0$ soit $\mu(1^2 + 1 + 1) = 0$ donc $\mu = 0$.
Donc $P = 0$.
On a donc bien $F \cap G = \{0\}$.
• Montrons que $F + G = E$.
Soit $P \in E$, montrons qu'il existe P_F dans F et P_G dans G tels que $P = P_F + P_G$.
Analyse : on suppose que $P = P_F + P_G$ avec $P_F \in F$ et $P_G \in G$.

$P_G \in G$ donc il existe un réel λ tel que $P_G = \lambda(X^2 + X + 1)$.
Alors, $P(1) = P_F(1) + \lambda(1^2 + 1 + 1) = 3\lambda$ (car $P_F(1) = 0$).
Donc $\lambda = \frac{P(1)}{3}$.
Synthèse : on note $P_G = \frac{P(1)}{3}(X^2+X+1)$ et $P_F = P - P_G$, montrons que P_F et P_G conviennent :
⋆ $P_F(1) = P(1) - \frac{P(1)}{3}(1^2 + 1 + 1) = P(1) - P(1) = 0$ donc $P_F \in F$.
⋆ P_G est bien colinéaire à $X^2 + X + 1$ donc $P_G \in G$.
⋆ $P_F = P - P_G$ donc $P = P_F + P_G$.
Donc P se décompose bien en une somme d'un polynôme de F et un polynôme de G.
Donc on a bien $\boxed{F \oplus G = E}$.

Correction 5.

1. (a) g est une somme de fonctions usuelles dérivables, donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$, donc sur $]0;+\infty[$, $g'(x) > 0$.
Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$.

(b) • g est une fonction continue sur $]0;+\infty[$ (car dérivable)
• g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
• $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ (somme de limites usuelles) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (idem)
Donc g est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,+\infty[$, donc 0 a un unique antécédent par g.
Autrement dit, $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]0;+\infty[}$.

De plus, $g(1) = 1 + 0 - 1 = -1 < 0$ et $g(2) = 4 + \ln(2) - 2 \approx 4,7 - 2 \approx 2,7 > 0$
Donc $g(1) < g(\alpha) < g(2)$, et g est strictement croissante donc $\boxed{1 < \alpha < 2}$.

(c)
```
def g(x):
    return x**2+log(x)-2

def dichotomie(epsilon):
    a,b=1,2
    while b-a>epsilon:
        c=(a+b)/2
        if g(c)>0:
            b=c
        else:
            a=c
    return c
```

2. (a) $\displaystyle\int_1^\alpha \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\alpha 1\ln(x)\,\mathrm{d}x$
on pose $u(x) = x \quad v(x) = \ln(x) \quad u$ et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
$u'(x) = 1 \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\text{Alors } \int_1^\alpha 1\ln(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(x)\Big]_1^\alpha - \int_1^\alpha x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \alpha\ln(\alpha) - 1\ln(1) - \int_1^\alpha 1\,\mathrm{d}x$$
$$= \underline{\alpha\ln(\alpha) - \alpha + 1}.$$

(b)
$$\text{Alors } \int_1^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\alpha x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^\alpha \ln(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^\alpha 2\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{1}{3}1^3 + \alpha\ln(\alpha) - \alpha + 1 - 2\alpha + 2$$
$$= \tfrac{1}{3}\alpha^3 - 3\alpha + \tfrac{8}{3} + \alpha\ln(\alpha)$$

Or $g(\alpha)=0$, c'est-à-dire $\alpha^2+\ln(\alpha)-2=0$ donc $\ln(\alpha)=2-\alpha^2$:

donc $\displaystyle\int_1^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\alpha^3-3\alpha+\frac{8}{3}+\alpha(2-\alpha^2)$

$= -\frac{2}{3}\alpha^3-\alpha+\frac{8}{3}$

$= \boxed{\frac{8-2\alpha^3}{3}-\alpha}$

3. **(a)** h est la composée de $x\mapsto 2-\ln(x)$, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par la racine carrée, également $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
De plus, pour $x<e^2$, $\ln(x)<2$ car ln est strictement croissante, donc $2-\ln(x)>0$.
Donc $\boxed{h \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,e^2[}$.

(b) En utilisant la formule $\sqrt{u}'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, on obtient $h'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2-\ln(x)}}=\boxed{-\dfrac{1}{2xh(x)}}$.

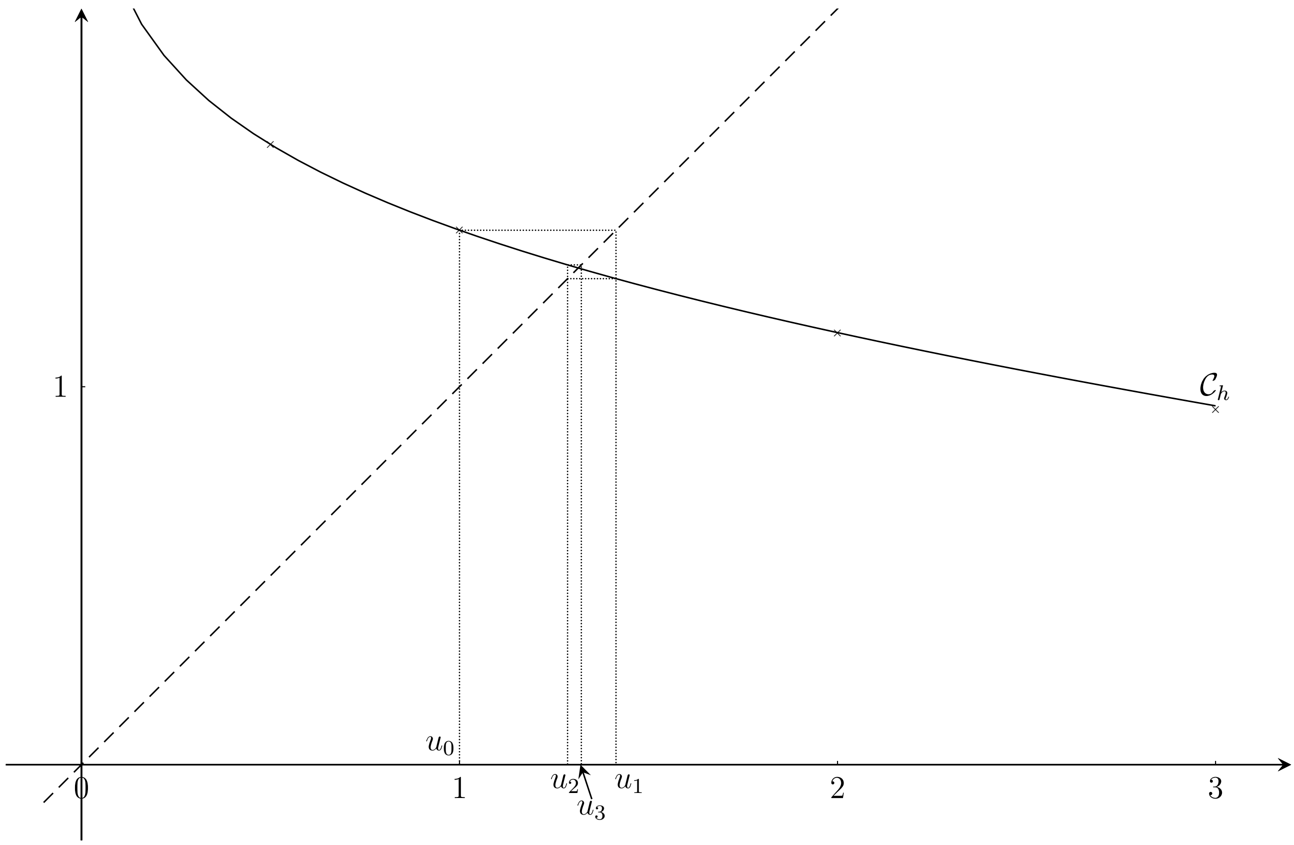
$h(x)$ est le résultat d'une racine carrée donc positif, x est positif sur I donc $h'(x)<0$ sur I donc h est strictement décroissante :

x	0	e^2
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to e^2}2-\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to e^2}h(x)=0$

(c)



4. **(a)** Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : u_n existe et $u_n\in[1;2]$.

Initialisation : $u_0=1$ donc existe et est entre 1 et 2 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire u_k existe et $u_k\in[1,2]$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$u_k\in[1,2]$ donc on peut calculer $h(u_k)$ donc u_{k+1} existe.
Et h est décroissante sur $[1,2]$, donc $h(u_k)\in[h(2),h(1)]$
Or $h(2)\approx 1,1\geqslant 1$ et $h(1)\approx 1,4\leqslant 2$, donc $u_{k+1}\in[1,2]$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \in [1,2]}$.

(b) h étant décroissante et à valeurs positives, $\forall x \in [1;2]$, $h(2) \leqslant |h(x)| \leqslant h(1)$, et donc d'après les valeurs approchées, $1 \leqslant |h(x)| \leqslant 2$ donc comme $x > 0$, on obtient $2x \leqslant 2x|h(x)| \leqslant 4x$ soit $2 \leqslant |2xh(x)| \leqslant 8$.

Par inverse, $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{|2xh(x)|} \geqslant \frac{1}{8} \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{pour } x \in [1,2],\ |h'(x)| \leqslant \frac{1}{2}}$.

(c) On sait que $g(\alpha) = 0$, donc $\alpha^2 = 2 - \ln(\alpha)$ et comme $\alpha > 0$, $\alpha = \sqrt{\alpha^2} = \sqrt{2 - \ln(\alpha)}$, c'est-à-dire $\boxed{h(\alpha) = \alpha}$.

Alors on a : $\star$ h est $\mathcal{C}^1$ donc continue et dérivable sur $[1,2]$ (d'après **3.(a)**)
$\star$ $\forall x \in [1;2]$, $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$
$\star$ $\alpha \in [1;2]$ et pour tout n, $u_n \in [1;2]$

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à h, entre u_n et α, on obtient : $|h(u_n) - h(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, c'est-à-dire $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$.

(d) Soit $\mathcal{P}(n)$ l'inégalité $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $|u_n - \alpha| = |u_0 - \alpha|$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc l'inégalité est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $|u_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k |u_0 - \alpha|$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $|u_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k |u_0 - \alpha|$.
En multipliant cette inégalité par $\frac{1}{2}$, on obtient $\frac{1}{2}|u_k - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k |u_0 - \alpha|$
Or, d'après la question précédente, $|u_{k+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_k - \alpha|$
Donc $|u_{k+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_k - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} |u_0 - \alpha|$
D'où $|u_{k+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} |u_0 - \alpha|$: l'inégalité est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}$.

On a $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$.
Donc par le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente vers } \alpha}$.

(e) $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$ car $u_0 = 1$ et $\alpha \in [1,2]$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
Or $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-4} \iff 2^n \geqslant 10^4 \iff n\ln(2) \geqslant 4\ln(10)$ (car ln croissante) ce qui est équivalent à $n \geqslant \frac{4\ln(10)}{\ln(2)}$ (car $\ln(2) > 0$).

Ainsi, $\boxed{\text{pour } n_0 = \left\lfloor \frac{4\ln(10)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1, \text{ si } n \geqslant n_0,\ u_n \text{ sera une valeur approchée à } 10^{-4} \text{ près de } \alpha}$.

(f)
```
n0=int(4*log(10)/log(2))+1
u=1
for k in range(n0):
    u=sqrt(2-log(u))
return u
```