Devoir Maison n°32

pour Mardi 11 juin à 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1.

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. **(a)** Déterminer deux réels α et β tels que :
$\forall x \in [0,1], \dfrac{x-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{\alpha}{x-2} + \dfrac{\beta}{x-3}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

3. **(a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+x+1 = \dfrac{3\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}{4}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
(on pourra faire le changement de variable $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$).

4. Calculer à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties (au moins une au choix) :

(a) $\displaystyle\int_{1}^{e} t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} y^2 \cos(y)\,\mathrm{d}y$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2.

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_{0}^{1} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1], 0 \leqslant t^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n$.

2. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3. Conclure sur la convergence de la suite (I_n).

4. Grâce à une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire que $I_n \sim \frac{1}{e(n+1)}$.

TSI 2.1 *lycée Monge* 2023-2024 DM n°32

Devoir Maison n°32

pour Mardi 11 juin à 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1.

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. **(a)** Déterminer deux réels α et β tels que :
$\forall x \in [0,1], \dfrac{x-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{\alpha}{x-2} + \dfrac{\beta}{x-3}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$.

3. **(a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+x+1 = \dfrac{3\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}{4}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
(on pourra faire le changement de variable $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$).

4. Calculer à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties (au moins une au choix) :

(a) $\displaystyle\int_{1}^{e} t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} y^2 \cos(y)\,\mathrm{d}y$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} (t^2+t+1)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2.

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_{0}^{1} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1], 0 \leqslant t^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n$.

2. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3. Conclure sur la convergence de la suite (I_n).

4. Grâce à une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire que $I_n \sim \frac{1}{e(n+1)}$.