Corrigé du DM n°32

Correction 1. indications, réponses

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

2. **(a)** $\dfrac{\alpha}{x-2} + \dfrac{\beta}{x-3} = \dfrac{\alpha(x-3)+\beta(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{(\alpha+\beta)x - 3\alpha - 2\beta}{x^2-5x+6}$

On identifie avec la forme voulue, donc on cherche α et β tels que $\alpha+\beta = 1$ et $-3\alpha-2\beta = -1$.
On trouve $\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 2}$.

(b) Donc
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= -\Big[\ln(|x-2|)\Big]_0^1 + 2\Big[\ln(|x-3|)\Big]_0^1 \\ &= \boxed{3\ln(2) - 2\ln(3)}\end{aligned}$$

3. **(a)** $\dfrac{3\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}{4} = \dfrac{3\left(\frac{4x^2+4x+1}{3}+1\right)}{4} = \dfrac{4x^2+4x+1+3}{4} = x^2+x+1.$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{4}{3\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}x.$

On pose $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

x va de -1 à 1 et $\frac{2\times(-1)+1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{2\times 1+1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, donc u va de $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ à $\sqrt{3}$.
Et $\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$, autrement dit $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$.
Donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4}{3(u^2+1)} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan(u)\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

4. **(a)** $\boxed{\displaystyle\int_1^e t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{(n+1)^2}e^{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}}$ (*on primitive* t^n *et on dérive* $\ln$)

(b) $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi} y^2\cos(y)\,\mathrm{d}y = -2\pi}$ (*deux intégrations par parties successives*)

(c) $\boxed{\displaystyle\int_0^1 (t^2+t+1)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -8e^{-1}+4}$ (*idem*)

Correction 2.

1. $\forall t \in [0,1], -t \leqslant 0$ donc $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$ (propriétés de la fonction exponentielle).
De plus, $t^n \geqslant 0$ donc en multipliant l'inégalité précédente par t^n, on a $\boxed{\text{pour } t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant t^n}$.

2. Donc, par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, on a $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$.
Or $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}1^{n+1} - \frac{1}{n+1}\times 0^{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
Donc $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$.

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } 0}$.

4. On pose $\begin{array}{lll} u(t) = t^{n+1} & \text{et} & v(t) = -e^{-t} \\ u'(t) = (n+1)t^n & \text{et} & v'(t) = e^{-t}. \end{array}$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc par intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-t^{n+1}e^{-t}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$I_{n+1} = -1e^{-1} - 0 + (n+1)\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Donc $\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n}$.

$I_n \sim \frac{1}{e(n+1)}$ signifie que $\dfrac{I_n}{\frac{1}{e(n+1)}} \to 1$.

On remarque que $\dfrac{I_n}{\frac{1}{e(n+1)}} = e(n+1)I_n$, on cherche donc la limite de $e(n+1)I_n$.

Or la suite (I_n) converge vers 0 et (I_{n+1}) est extraite de (I_n) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{e} + (n+1)I_n = 0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)I_n = \dfrac{1}{e}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e(n+1)I_n = 1$

Donc $\boxed{I_n \sim \frac{1}{e(n+1)}}$.