Devoir Maison n°31

pour Mardi 4 mai à 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
La question avec ★ est facultative.

Traiter les exercices 1 et 2, et au choix l'exercice 3 ou le 4.

Pour plus d'entraînement, on pourra faire l'exercice 3 sur les lois usuelles, et/ou les exercices 2 et 4 sur la dérivabilité.

Exercice 1.

On note $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base.

2. Montrer que l'espace vectoriel F des polynômes constants est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Donner une base adaptée à cette décomposition de E en somme directe.
★ Donner les coordonnées de $P = 2X^3 + X^2 - X + 1$ dans cette base.

Exercice 2.

Inventer un énoncé pour obtenir chacune des réponses suivantes :

1. X suit une loi binomiale de paramètres 14 et $0,2$.

2. $E(W) = 7,5$.

3. **(a)** Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,7$.

(b) $Z = -3Y + 2$ et $E(Z) = -0,1$.

Exercice 3.

Un robot se déplace sur un axe gradué. Il est situé à l'origine de cet axe, et à chaque étape, il se déplace d'une unité dans un sens ou dans l'autre de manière équiprobable.
Par exemple, à la fin de la première étape, il peut se trouver à l'abscisse 1 ou à l'abscisse -1, avec une probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque possibilité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse occupée par le robot après n étapes. L'objet de cet exercice est d'étudier X_n et d'évaluer la probabilité que le robot se retrouve à sa position originale à la fin de l'expérience.

1. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 3$.
Déterminer la loi de X_3 (*un arbre correctement annoté pourra servir de justification*).

2. Cas général.

(a) Soit Y_n le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en n déplacements. Quelle est la loi de Y_n ?
Préciser l'ensemble des valeurs prises par Y_n et la probabilité de chacune.

(b) Exprimer X_n en fonction de Y_n.

(c) Quelle est la probabilité que le robot soit revenu en position initiale après n étapes ?

Exercice 4. (inspiré par Lorette)

Luigi veut faire une pizza. Dans sa boîte d'ingrédients, il a 200 morceaux de gorgonzola et 800 morceaux de mozzarella, et on ne peut pas les distinguer au toucher. Pour faire sa pizza, il va piocher 20 morceaux de fromage. Le nombre de morceaux est suffisant pour que les 20 tirages puissent être assimilés à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire du nombre de morceaux de gorgonzola sur sa pizza.
Déterminer la loi de X, et calculer son espérance et sa variance.

Devoir Maison n°31
pour Mardi 4 mai à 8h

Version « moins mais bien ».

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1.

On note $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base.

2. Montrer que l'espace vectoriel F des polynômes constants est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Donner une base adaptée à cette décomposition de E en somme directe.

Exercice 2.

Inventer un énoncé pour obtenir une des réponses suivantes (*au choix entre **1** et **3***) :

1. X suit une loi binomiale de paramètres 14 et $0,2$.

3. **(a)** Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,7$.

(b) $Z = -3Y + 2$ et $E(Z) = -0,1$.

Exercice 3.

Un robot se déplace sur un axe gradué. Il est situé à l'origine de cet axe, et à chaque étape, il se déplace d'une unité dans un sens ou dans l'autre de manière équiprobable.
Par exemple, à la fin de la première étape, il peut se trouver à l'abscisse 1 ou à l'abscisse -1, avec une probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque possibilité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse occupée par le robot après n étapes. L'objet de cet exercice est d'étudier X_n et d'évaluer la probabilité que le robot se retrouve à sa position originale à la fin de l'expérience.

2. **(a)** Soit Y_n le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en n déplacements. Quelle est la loi de Y_n ?
Préciser l'ensemble des valeurs prises par Y_n et la probabilité de chacune.

(b) Exprimer X_n en fonction de Y_n.

(c) Quelle est la probabilité que le robot soit revenu en position initiale après n étapes ?

TSI 2.1 *lycée Monge* 2023-2024 DM n°31

Devoir Maison n°31
pour Mardi 4 mai à 8h

Version « moins mais bien ».

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1.

On note $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base.

2. Montrer que l'espace vectoriel F des polynômes constants est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Donner une base adaptée à cette décomposition de E en somme directe.

Exercice 2.

Inventer un énoncé pour obtenir une des réponses suivantes (*au choix entre **1** et **3***)

1. X suit une loi binomiale de paramètres 14 et $0,2$.

3. **(a)** Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,7$.

(b) $Z = -3Y + 2$ et $E(Z) = -0,1$.

Exercice 3.

Un robot se déplace sur un axe gradué. Il est situé à l'origine de cet axe, et à chaque étape, il se déplace d'une unité dans un sens ou dans l'autre de manière équiprobable.
Par exemple, à la fin de la première étape, il peut se trouver à l'abscisse 1 ou à l'abscisse -1, avec une probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque possibilité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse occupée par le robot après n étapes. L'objet de cet exercice est d'étudier X_n et d'évaluer la probabilité que le robot se retrouve à sa position originale à la fin de l'expérience.

2. **(a)** Soit Y_n le nombre de déplacements positifs effectués par le robot en n déplacements. Quelle est la loi de Y_n ?
Préciser l'ensemble des valeurs prises par Y_n et la probabilité de chacune.

(b) Exprimer X_n en fonction de Y_n.

(c) Quelle est la probabilité que le robot soit revenu en position initiale après n étapes ?