Corrigé du DM n°31

Correction 1.

1. ⋆ $$\begin{aligned} P \in E &\iff (X-1)|P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], P = (X-1)Q \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, P = (X-1)(aX^2+bX+c) \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, P = aX^2(X-1)+bX(X-1)+c(X-1) \\ &\iff P \in \mathrm{Vect}\,(P_1,P_2,P_3) \text{ avec } P_1 = X^2(X-1),\ P_2 = X(X-1) \text{ et } P_3 = X-1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X]}$ et (P_1,P_2,P_3) est une famille génératrice de E.

⋆ La famille (P_1,P_2,P_3) est libre car les degrés des polynômes sont échelonnés.

Donc $\boxed{(P_1,P_2,P_3) \text{ est une base de } E}$.

2. ⋆ Montrons que $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$.
Soit $P \in E \cap F$, P est dans F donc P est constant, et P est dans E donc $P(1) = 0$, donc la valeur de la constante est 0, donc $P = 0$.
Donc $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$.

⋆ $F = \mathbb{R}_0[X]$ donc $\dim(F) = 1$, et $\dim(E) = 3$ (base formée de 3 polynômes), et $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.
Donc $\dim(E) + \dim(F) = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.

Donc $\boxed{E \oplus F = \mathbb{R}_3[X]}$.

3. 1 est une base de F et (P_1,P_2,P_3) est une base de E donc
$\boxed{(P_1,P_2,P_3,1) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X] \text{ adaptée à la décomposition en somme directe } \mathbb{R}_3[X] = E \oplus F}$.

Correction 3.

1. $X_3(\Omega) = \{-3;-1;1;3\}$.
$\mathbf{P}(X_3 = 3) = \mathbf{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{8}$ et $\mathbf{P}(X_3 = 1) = \mathbf{P}(X_3 = -1) = \frac{3}{8}$.

Attention : *dans l'arbre, bien préciser les notations, et distinguer les différents instants : A_k « déplacement positif à l'instant k ».*

2. **(a)** Y_n compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli d'épreuve : « le robot se déplace d'une case ». Le succès est « se déplacer de +1 » obtenu avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
L'épreuve est répétée n fois, et elles sont indépendantes les unes des autres (équiprobabilité), on obtient donc $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$.

Alors $\boxed{Y_n(\Omega) = [\![0,n]\!]}$ et $\forall k \in Y_n(\Omega), \mathbf{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

(b) Sur les n déplacements, le robot en a fait Y_n positifs, et donc $(n - Y_n)$ négatifs, donc la position est $X_n = Y_n - (n - Y_n)$. Donc $\boxed{X_n = 2Y_n - n}$.

(c) Le robot est revenu à la position initiale en n étapes est l'événement $(X_n = 0)$, soit $(Y_n = \frac{n}{2})$.
Or Y_n prend des valeurs entières, donc si n est impair, $\mathbf{P}(X_n = 0) = 0$.
Si n est pair, $\mathbf{P}(Y_n = \frac{n}{2}) = \binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La probabilité que le robot soit revenu à sa position initiale en n étapes est :
⋆ 0 si n impair
⋆ $\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ si n est pair.

Correction 4.

X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli d'épreuve : « Luigi prend un morceau de fromage ». Le succès est « il prend un morceau de gorgonzola ».
L'épreuve est répétée 20 fois, et les répétitions sont indépendantes les unes des autres car on assimile les tirages à des tirages avec remise. La probabilité du succès est $\frac{200}{200+800}$ soit $0,2$ car il y a équiprobabilité sur les morceaux (ils sont indiscernables au toucher).
Donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } 20 \text{ et } 0,2}$.

Et donc $E(X) = 20 \times 0,2 = \boxed{4}$ et $V(X) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = \boxed{3,2}$