Devoir Maison n°30

pour Mardi 28 mai à 8h

La présentation et la rédaction devront être soignées.
Les exercices ou questions avec ★ sont facultatifs.

Exercice 1.

1. **(a)** Donner l'ensemble de définition et les intervalles de continuité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$.

(b) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$ et définir ce prolongement que l'on notera g.

(c) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

(d) Si oui, g est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

2. Mêmes questions avec la fonction $h : x \mapsto x^x$ à prolonger sur $\mathbb{R}^+$.

★ Exercice 2.

$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (1+x)\sqrt{1-x^2}$ est-elle continue sur $[-1,1]$?
Déterminer son ensemble de dérivabilité.

Exercice 3.

Calculer les dérivées de 4 fonctions parmi les suivantes :

$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$h(x) = (1+x)^{1-x}$	$l(x) = xe^{\sin(x)}$
$g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$	$k(x) = \left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\right)^3$	$m(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{x^2+1}}$

Exercice 4.

1. a et b sont des réels avec $0 < a < b$.
Appliquer l'inégalité des accroissements finis (première version) à la fonction ln entre a et b. (*on justifiera avec précision que ce théorème s'applique*)

2. En déduire que $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2$ avec $a < b$, $\quad a \leqslant \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leqslant b$.

TSI 2.1 *lycée Monge* 2023-2024 DM n°30

Devoir Maison n°30

pour Mardi 28 mai à 8h

Version « moins mais bien ».

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1.

1. **(a)** Donner l'ensemble de définition et les intervalles de continuité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$.

(b) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$ et définir ce prolongement que l'on notera g.

(c) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

(d) Si oui, g est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.

Calculer les dérivées de 3 fonctions parmi les suivantes :

$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$h(x) = (1+x)^{1-x}$	$l(x) = xe^{\sin(x)}$
$g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$	$k(x) = \left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\right)^3$	$m(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{x^2+1}}$

Exercice 4.

1. a et b sont des réels avec $0 < a < b$.
Appliquer l'inégalité des accroissements finis (première version) à la fonction ln entre a et b. (*on justifiera avec précision que ce théorème s'applique*)