Corrigé du DM n°30

Correction 1.

1. (a) f est un quotient :
le numérateur et le dénominateur sont définis et continus sur $\mathbb{R}$, et le dénominateur ne s'annule que en 0 donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$ et $\boxed{f \text{ est continue sur }]-\infty, 0[\text{ et continue sur }]0, +\infty[}$.

(b) $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement } g \text{ est } \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$.

(c) pour $x \neq 0$: $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{1-\cos(x)}{x} - 0}{x} = \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x^2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$
donc $\boxed{g \text{ est dérivable en 0}}$ (et $g'(0) = \frac{1}{2}$).

(d) Le numérateur et le dénominateur de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ (fonctions usuelles) et le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, donc f est $\mathcal{C}^1$ donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
$\forall x \neq 0, g'(x) = \dfrac{\sin(x)x - (1 - \cos(x))1}{x^2} = \dfrac{x\sin(x) + \cos(x) - 1}{x^2} = \dfrac{\sin(x)}{x} + \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$.
Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\cos(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} g'(x) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = g'(0)$.
Donc g' est continue en 0
Donc $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. (a) h est définie sur $\mathbb{R}^*$ avec $\forall x > 0$, $h(x) = e^{x\ln(x)}$.
h est la composée de $x \mapsto x\ln(x)$, continue sur $]0, +\infty[$ (produit) par la fonction exponentielle continue sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{h \text{ est continue sur }]0, +\infty[}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ (par le théorème des croissances comparées), et $\lim\limits_{X \to 0} e^X = 1$ donc par composition, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$, ce qui est un nombre fini.

$\boxed{h \text{ est prolongeable par continuité en 0, et son prolongement est } j : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ h(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

(c) pour $x > 0$: $\dfrac{j(x) - j(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{x\ln(x)} - 1}{x}$.
Or $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ (croissances comparées) et $e^y - 1 \underset{y \to 0}{\sim} y$ donc $\frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x} \underset{x \to 0}{\sim} \ln(x)$
Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\infty$.
La limite du taux d'accroissement en 0 n'est pas finie, donc la fonction j n'est pas dérivable en 0.
Donc $\boxed{\text{le prolongement de } h \text{ n'est pas dérivable sur } \mathbb{R}^+}$.

Correction 3. (réponses, mais elles peuvent aussi être données sous d'autres formes)

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$g'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

$h'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} - \ln(1+x)\right)(1+x)^{1-x}$

$k'(x) = -3\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{x}\right)\right)^2$

$l'(x) = (1 + x\cos(x))e^{\sin(x)}$

$m'(x) = \frac{(x^2+1-2x^2\ln(x))\sqrt{x^2+1}}{2x(x^2+1)^2\sqrt{\ln(x)}}$

Correction 4.

1. ⋆ ln est continue sur $[a, b]$;
⋆ ln est dérivable sur $]a, b[$;
⋆ $\forall x \in]a, b[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et si $a < x < b$ (avec $a > 0$), alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$, donc $\frac{1}{b} < \ln'(x) < \frac{1}{a}$.
Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à ln entre a et b, on a $\boxed{\frac{1}{b}(b-a) \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \frac{1}{a}(b-a)}$.

Attention : *la rédaction doit être aussi précise que cela ! Tout est utile !!*

2. En repartant de l'inégalité précédente, et en la divisant par $b - a$ qui est positif car $a < b$, on a $\frac{1}{b} \leqslant \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} \leqslant \frac{1}{a}$.
Ces trois nombres sont strictement positifs, donc on peut appliquer la règle de l'inverse, et on obtient $\boxed{a \leqslant \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} \leqslant b}$