Corrigé du DM n°30

Correction 1.

1. M. Brayer répète 14 fois la même épreuve : mettre une note aléatoire à une copie, et le succès est « la copie obtient la note 5 ». Les épreuves sont indépendantes les unes des autres car les notes ne s'influencent pas entre elles, et on considère qu'il y a équiprobabilité, donc la probabilité du succès est $\frac{1}{5}$.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres 14 et } \frac{1}{5}}$.

2. $E(X) = 14 \times \frac{1}{5} = 2,8$ donc $\boxed{\text{en moyenne, chaque semaine, 2,8 élèves auront 5/5 à l'interrogation}}$.

Correction 3.

1. • Montrons que $F \cap G = \{P_0\}$ où P_0 est le polynôme nul.
Soit P dans $F \cap G$.
$P \in F$ donc il existe deux réels λ et μ tels que $P = \lambda(1+X) + \mu(1+X^2)$.
Et $P \in G$ donc $P(-1) = 0$ donc $\lambda \times 0 + \mu \times 2 = 0$ donc $\mu = 0$.
Et $P \in G$ donc $P(0) = 0$ donc $\lambda \times 1 + 0 = 0$ donc $\lambda = 0$.
Donc $P = P_0$.
Donc on a bien $F \cap G = \{P_0\}$.

• Montrons que $\dim(F) + \dim(G) = \mathbb{R}_3[X]$.
⋆ P_1 et P_2 sont de degrés échelonnés donc forment une base de F et donc $\dim(F) = 2$.
⋆ Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\quad P \in G \iff X(X+1)|P$

$$\begin{aligned} &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = X(X+1)Q \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = X(X+1)(aX+b) \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = aX^2(X+1) + bX(X+1) \end{aligned}$$

Donc $G = \text{Vect}\left(X^2(X+1), X(X+1)\right)$
Ces deux vecteurs sont de degrés échelonnés, donc ils forment une base de G et $\dim(G) = 2$.
Donc $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$

Donc $\boxed{\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G}$.

2. On sait que F et G sont supplémentaires donc il existe des réels λ et μ et un polynôme Q de G tels que $P = \lambda P_1 + \mu P_2 + Q$.
Alors $P(-1) = \lambda P_1(-1) + \mu P_2(-1) + Q(-1) = 2\mu$ donc $\mu = \frac{1}{2}(2+2+1-3) = 1$.
Et de même, $P(0) = \lambda \times 1 + 1 \times 1 + Q(0)$ donc $\lambda = 2 - 1 = 1$.
Alors $Q = P - (1+X) - (1+X^2) = -3X + 3X^3$.
Donc $\boxed{P = (2+X+X^2) + (-3X+3X^3) \text{ avec } 2+X+X^2 \in F \text{ et } -3X+3X^3 \in G}$.

Autre méthode : on aurait pu déterminer les coordonnées de P dans la base obtenue par recollement $(P_1, P_2, X^2(X+1), X(X+1))$ et regrouper les deux premières composantes, et les deux dernières.