

✱ CORRECTION DU CAHIER DE VACANCES ✱

Correction 1. indications

1. récurrence
2. (a) récurrence en utilisant et mentionnant la croissance de la fonction racine carrée
(b) la propriété $\mathcal{P}(n)$ est « $v_n \leq v_{n+1}$ ».

Correction 2. indication

Récurrence à deux prédécesseurs.

Correction 3. réponses

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $f'(x) = 2 \cos(1 + \frac{1}{x}) + \frac{2}{x} \sin(1 + \frac{1}{x})$ | (e) $f'(x) = 1 - \frac{2x^2+14x+2}{(x^2-1)^2}$ | (i) $f'(x) = \frac{-2}{3-2x}$ |
| (b) $f'(x) = -5 - \frac{2}{3x^2}$ | (f) $f'(x) = 6(2x-1)^2$ | (j) $f'(x) = \frac{1}{\pi} \sin(\frac{-x}{\pi} + 1)$ |
| (c) $f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}$ | (g) $f'(x) = \frac{3}{1+(3x+5)^2}$ | (k) $f'(x) = (1-2x)e^{-2x} + 2$ |
| (d) $f'(x) = \frac{-10}{(x-3)^2}$ | (h) $f'(x) = -\frac{24}{(2x+5)^4}$ | (l) $f'(x) = -\frac{2}{x^3} \exp(\frac{1}{x^2})$ |

Correction 4. indications et réponses

- $z_1 = (-1 - i)^{15}$:

$$-1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

$$\text{Donc } z_1 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^{15} = (\sqrt{2})^{15}e^{15i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\frac{15 \times 5}{4} = \frac{75}{4} = \frac{8 \times 9 + 3}{4} = 2 \times 9 + \frac{3}{4} \quad \text{donc}$$

la forme trigonométrique de z_1 est $(\sqrt{2})^{15}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

- $z_2 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^2$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ et } \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ donc } \frac{i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ donc } z_2 = \frac{1}{4}e^{5i\frac{\pi}{3}}$$

- $z_3 = -6 + 2i\sqrt{3}$

$$|z_3| = \dots, \cos(\theta) = \dots \text{ on trouve } z_3 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

- $z_4 = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$: le module est un nombre positif ! $-1 = e^{i\pi}$ donc $z_4 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$

- $z_5 = -\cos\left(7\frac{\pi}{11}\right) - i\sin\left(7\frac{\pi}{11}\right) = -e^{i\frac{7\pi}{11}} = e^{i\frac{4\pi}{11}}$

- $z_6 = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) - i\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos(\dots) + i\sin(\dots)$ (formules de trigonométrie avec $\frac{\pi}{2}$) on trouve $z_6 = e^{i\frac{\pi}{10}}$.

Correction 5. indications

1. on peut conjecturer que ces droites sont perpendiculaires.
2. $\frac{z_C - z_A}{z_B} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$
3. Oui, car $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B}\right) [2\pi] = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Correction 6.

1. ★ numérateur : défini sur $\mathbb{R}$ (composée de deux fonctions de référence définies sur $\mathbb{R}$)
★ dénominateur : la racine est définie sur $[0; +\infty[$ et $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$ donc le dénominateur est défini sur $[-1; \infty[$
★ $\sqrt{x+1} - 1 = 0 \iff \sqrt{x+1} = 1 \iff x+1 = 1 \iff x = 0$
Donc f est définie sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
2. ★ $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ donc $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$;

$$\star \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \text{ donc } \sqrt{x+1} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x.$$

Donc $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{\frac{1}{2}x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 4}$, donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 4}$.

Correction 7.

$\star$ Sur $]0, 2\pi[$: f est le quotient de $x \mapsto x^2$ qui est continue, par $x \mapsto 1 - \cos(x)$ qui est continue et ne s'annule pas sur $]0, 2\pi[$.

Donc f est continue sur $]0, 2\pi[$.

$\star$ En 0 : pour $x \neq 0$, $\frac{x^2}{1 - \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$

donc f est continue en 0.

Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } [0, 2\pi[}$.

Correction 8. réponses

1. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{4}x^3 + o(x^4)$
2. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^6)$
3. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + o(x^4)$
4. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{23}{40}x^5 - \frac{19}{48}x^6 + o(x^6)$
5. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{31}{720}x^6 + o(x^7)$

Correction 9.

$\star$ g est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme de fonctions usuelles continues sur cet intervalle ;

$\star$ g est dérivable (même raison) et $\forall x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ce qui est strictement positif.

Donc g est strictement croissante.

$\star \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ (somme) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (somme)

Donc par le théorème de la bijection, g est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

Donc 0 a un unique antécédent par la fonction g , autrement dit $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ a une unique solution}}$.

$g(1) = 1 + \ln(1) - 2 = -1$ et $g(2) = 4 + \ln(2) - 2 = 2 + \ln(2)$.

Donc $g(1) < g(\alpha) < g(2)$ (car $\ln(2) > 0$).

Or g est strictement croissante, donc $\boxed{1 < \alpha < 2}$.

Correction 10.

1. Sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, x ne s'annule pas donc f est dérivable sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

$$\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right).$$

$$\frac{2}{x^2} \geq 0 \text{ donc } 1 - \frac{2}{x^2} \leq 1 \text{ donc } f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{De plus, } x \geq \sqrt{2} \text{ donc } x^2 \geq 2 \text{ donc } \frac{2}{x^2} \leq 1, \text{ donc } f'(x) \geq 0.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}}.$$

2. Inégalité des accroissements finis (à revoir dans le cours si besoin !!) :

$$\text{Soit } f \text{ une fonction } \begin{cases} \text{continue sur } [a, b] \\ \text{dérivable sur }]a, b[\\ \text{telle que } \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k \end{cases} \quad \text{alors } \forall (x_1, x_2) \in [a, b]^2, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|.$$

Soit $x \in [\sqrt{2}, +\infty[$:

$\star$ f est dérivable et continue sur $[\sqrt{2}, x]$

$\star \forall t \in]\sqrt{2}, x[, |f'(t)| \leq \frac{1}{2}$

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre $\sqrt{2}$ et x :

$$|f(x) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2} |x - \sqrt{2}|.$$

$$\text{Or } f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

$$\text{Donc } \boxed{|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |x - \sqrt{2}|}.$$

3. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$.

Initialisation : pour $n = 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $|u_k - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |u_0 - \sqrt{2}|$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

D'après l'énoncé, $u_k \geq \sqrt{2}$ donc on peut appliquer l'inégalité de la question précédente avec $x = u_k$:

$$|f(u_k) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |u_k - \sqrt{2}|.$$

Or $f(u_k) = u_{k+1}$ donc $|u_{k+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |u_k - \sqrt{2}|$.

Or par hypothèse, $|u_k - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k |u_0 - \sqrt{2}|$.

Donc $|u_{k+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k |u_0 - \sqrt{2}|$, soit $|u_{k+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} |u_0 - \sqrt{2}|$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$.

4. Ainsi, $-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{2} = 0$ donc (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right| \leq 10^{-4} &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4} \frac{1}{\frac{3}{2} - \sqrt{2}} \\ &\iff n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(10^{-4}) - \ln\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante} \\ &\iff n \geq \ln(2) \left(4 \ln(10) + \ln\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)\right) \quad \text{car } \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0 \end{aligned}$$

$$\ln(2) \left(4 \ln(10) + \ln\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)\right) \approx 4,7$$

Donc pour $n \geq 5$, u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

Remarque : cette technique permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$, et on voit qu'avec peu de calcul, on a déjà une précision intéressante.

5. `from math import *`

```
def un(n):
    u=3/2
    for k in range(n):
        u=0.5*(u+2/u)
    return u
```

Pour tracer le graphique :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
N=[] # liste des indices
Un=[] # liste des valeurs successives de la suite
u=3/2
for k in range(100): # pour représenter les 100 premiers points,
    N.append(k) # ici cela suffit largement mais on peut modifier
    Un.append(u) # la valeur une fois qu'on a vu l'allure générale du graphique
    u=0.5*(u+2/u)

plt.plot(N,Un)
```

Correction 11.

1. (a) • en $+\infty$, $x^2 - 3x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x}$

donc d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- en $-\infty$, par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$.

(b) La courbe représentative de f a une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

- Factoriser $f'(x)$ par e^{-x} .
- formule du cours ! on trouve $y = -4x + 1$.
- En premier, tracer la tangente, et noter le point où la courbe doit se coller à cette tangente, puis l'asymptote, et repérer la zone où la courbe doit s'en rapprocher.
Ensuite, le tableau des variations donne l'allure, il suffit de le recopier « de façon artistique » en s'appuyant sur la tangente et l'asymptote.
(vérifier en traçant sur la calculatrice)
- (a) ★ f est continue sur $] -\infty, 1[$ (produit d'un polynôme et d'une exponentielle continues)
★ f est strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$
★ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{e}$
Donc f réalise une bijection de $] -\infty, 1[$ sur $] -\frac{1}{e}, +\infty[$.
Or $2 \in] -\frac{1}{e}, +\infty[$.
Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 2 \text{ a une unique solution sur }] -\infty, 1[}$.
(b) $f(-1) = 5e > 2$ et $f(0) = 1$ donc $f(0) < f(\alpha) < f(-1)$.
Or f est strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$, qui contient les nombres $0, \alpha$ et -1 , donc $\boxed{0 > \alpha > -1}$.
 α est à l'intersection de la courbe de f et de l'axe des abscisses sur $] -\infty, 1[$.

Correction 12. réponses

- $\int_{-1}^2 (e^x + \cos x + 3x + 1) dx = e^2 + e^{-1} + \sin(2) + \sin(1) + \frac{15}{2}$
 $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 3x^5 + \sqrt{x} \right) dx = \ln(2) + \frac{94}{3} + \frac{(\sqrt{2})^5}{3}$
- $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$
 $I = \int_0^t \cos x e^x dx$: par deux intégrations par parties successives, on trouve $I = \cos(t)e^t - 1 + \sin(t)e^t - I$
donc $I = \frac{1}{2}(e^t(\cos(t) + \sin(t)) - 1)$
 $\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$
- $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 \sin(u) du = 1 - \cos(1)$
 $\int_1^t \frac{1}{x(1+\sqrt{x})} dx = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{2}{u(1+u)} du = 2 \int_1^{\sqrt{t}} \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} du = 2 \ln \left(\frac{2\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \right)$

Correction 13.

- $1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.
Donc $I_1 = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx = \left[x - \ln(1+x) \right]_0^1 = 1 - \ln(2) - (0 - \ln(1)) = \boxed{1 - \ln(2)}$.
- $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2} \ln(2)}$.

$$\begin{aligned}
3. \text{ Soit } n \text{ dans } \mathbb{N}, \quad I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^{n+1}} - \frac{x}{1+x^n} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x(1+x^n) - x(1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^{n+2}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx
\end{aligned}$$

Pour $x \in [0, 1]$ et $x \geq 0$, $1-x \geq 0$ et $(1+x^{n+1})(1+x^n) \geq 0$ donc la fraction est positive, donc par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \geq 0$.

Donc (I_n) est croissante.

4. Pour $x \in [0, 1]$, $0 \leq x^n \leq 1$ donc $1 \leq 1+x^n \leq 2$ donc par inverse avec ces nombres strictement croissants, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ donc par produit avec x positif, pour $x \in [0, 1]$, $\frac{x}{2} \leq \frac{x}{1+x} \leq x$.

Donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{x}{2} dx \leq I_n \leq \int_0^1 x dx$

$$\text{Or } \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{4} \leq I_n \leq \frac{1}{2}.$$

5. (I_n) est croissante, et majorée (par $\frac{1}{2}$) donc (I_n) est convergente.

Correction 14. réponses

1. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{\frac{3}{2}x}, \lambda \in \mathbb{C}\}$
2. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{2x}, \lambda \in \mathbb{C}\}$
3. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{2x} - \frac{6}{13} \cos(3x) + \frac{9}{13} \sin(3x) - 4e^x, \lambda \in \mathbb{C}\}$
4. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{3x} + 2xe^{3x}, \lambda \in \mathbb{C}\}$

Correction 15. réponses

1. dans $\mathbb{C}$: $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{-ix} - \frac{3}{2}x \cos(x), \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$
dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^t + \frac{1}{2}te^t, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^2\}$
3. dans $\mathbb{C}$: $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{(1+2i)x} + \mu e^{(1-2i)x} + \frac{2}{5}e^{2x}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$
dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{S} = \{x \mapsto e^x(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)) + \frac{2}{5}e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
4. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x + \frac{3}{2}x^2 e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^2\}$

Correction 16.

- ★ On résout l'équation homogène $y'' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ les solutions sont $2i$ et $-2i$.

Les solutions à valeurs réelles de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$.

- ★ On recherche une solution particulière sous la forme $f(x) = \alpha x \cos(2x) + \beta x \sin(2x)$.

$$\begin{aligned}
f \text{ est bien } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x) + x(-2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x)) \\
&= (\alpha + 2x\beta) \cos(2x) + (\beta - 2x\alpha) \sin(2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } f''(x) &= 2\beta \cos(2x) - 2(\alpha + 2x\beta) \sin(2x) - 2\alpha \sin(2x) + 2(\beta - 2x\alpha) \cos(2x) \\
&= (4\beta - 4x\alpha) \cos(2x) - (4\alpha + 4x\beta) \sin(2x)
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } f''(x) + 4f(x) = \cos(2x) \iff 4\beta \cos(2x) - 4\alpha \sin(2x) = \cos(2x).$$

$$\text{On peut prendre } \boxed{\beta = \frac{1}{4} \text{ et } \alpha = 0}.$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{4}x \sin(2x)$ est une solution particulière de l'équation (E).

- ★ L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ y : x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) + \frac{1}{4}x \sin(2x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- ★ Si y est une solution de (E) alors $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = 2\mu + 0$ donc pour satisfaire aux conditions initiales, il faut $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{1}{2}$ (et d'après le théorème de Cauchy, on sait que la solution existe).

Donc la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est $y : x \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x\right) \sin(2x)$.

Correction 17. réponses

1. X_k suit la loi uniforme sur $\{1; 2\}$.
2. Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
3. Z_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. (à justifier !!)
4. $W_n = \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n (Y_k + 1) = Z_n + n$.

Donc $W_n(\Omega) = \llbracket n, 2n \rrbracket$ et pour tout k de $W_n(\Omega)$, $\mathbf{P}(W_n = k) = \mathbf{P}(Z_n = k - n) = \binom{n}{k-n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Correction 18.

$Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

On note F_k l'événement « le lancer k a donné Face ».

$\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ par indépendance des lancers successifs ;

$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(\overline{F_1}) = \frac{1}{2}$;

$\mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(F_1 \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4}$;

$\mathbf{P}(Y = 3) = \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3}) = \frac{1}{8}$.

$E(Y) = \frac{11}{8}$ et $V(X) = \frac{47}{64}$.

Correction 19. réponses.

Partie A.

1. D suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 6 \rrbracket$.
2. Formule des probabilités totales dans le système complet formé par les trois événements $(D = 1, 2 \text{ ou } 3)$, $(D = 4 \text{ ou } 5)$ et $(D = 6)$.
On trouve $\mathbf{P}(R) = \frac{13}{30}$.
3. Formule de probabilité des causes, après calculs : $\mathbf{P}_R(D = 6) = \frac{4}{13}$.
4. Comparer $\mathbf{P}(D = 6)$ et $\mathbf{P}_R(D = 6)$: non indépendants.
5. On cherche $\mathbf{P}(V_1 \cap R_2)$, et par la formule des probabilités composées, on trouve $\frac{7}{20}$.

Partie B.

1. équiprobabilité
2. loi binomiale $\mathcal{B}(20, \frac{3}{5})$, rédiger correctement la justification (vérifier dans le cours tous les arguments à donner !).
3. penser à l'événement contraire. (on trouve $\left(\frac{2}{5}\right)^{20}$)
4. $E(X) = 12$, $V(X) = \frac{24}{5}$
5. $G = 18X - 160$ donc par linéarité de l'espérance $E(G) = 18E(X) - 160 = 56$: le gain moyen d'une partie est 56 euros.

Correction 20. réponses

1. pas de solution
2. $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, -1 - z, z, -\frac{1}{2} \right), z \in \mathbb{R} \right\}$

Correction 21.

- ★ Le polynôme nul est dans F car sa dérivée est nulle aussi, et $0 + 3X \times 0 = 0$.

★ Soient P et Q dans F et λ dans $\mathbb{R}$, montrons que $P + \lambda Q$ est dans F .

$$\begin{aligned}(P + \lambda Q) + 3X(P + \lambda Q)' &= P + \lambda Q + 3X(P' + \lambda Q') \quad \text{Donc } P + \lambda Q \in F. \\ &= P + \lambda Q + 3XP' + 3X\lambda Q' \\ &= P + 3XP + \lambda(Q + 3XQ') \\ &= 0 + \lambda 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

★ Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_2[X]}$.

Correction 22.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0, 0, 0, 0)$.

$$\text{Alors, } \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

En résolvant le système on trouve bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

on pouvait aussi former la matrice des vecteurs en colonne, et comparer son rang au nombre de colonnes

Si on pose $u_4 = (0, 0, 0, 1)$, en utilisant la matrice des vecteurs en colonne, on constate que le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est 4, et comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, cette famille est une base.

il y a une infinité d'autres solutions pour le vecteur u_4 !

2. (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre, donc $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \oplus \text{Vect}(u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$
Autrement dit $G \oplus \text{Vect}(u_4) = \mathbb{R}^4$, donc $\text{Vect}(u_4)$ est un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$.

Correction 23.

1. $x - 2y + z = 0 \iff x = 2y - z$ donc $F = \{(2y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.
Autrement dit, $F = \text{Vect}(e_2, e_3)$ avec $e_2 = (2, 1, 0)$ et $e_3 = (-1, 0, 1)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

De plus, ces deux vecteurs forment une famille libre donc une base de F .

2. $\text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 3$ (rang de la matrice de ces vecteurs en colonne... à rédiger)
Donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Donc (par la propriété sur les bases et sommes directes), $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}$.

Autre méthode :

★ Montrons que $F \cap G = \{0\}$: soit u dans $F \cap G$, alors $u \in G$ donc il existe λ tel que $u = (\lambda, \lambda, 0)$, et $u \in F$ donc $\lambda - 2\lambda + 0 = 0$ soit $\lambda = 0$.

Donc $u = (0, 0, 0)$, donc $F \cap G$ est réduit au vecteur nul.

★ $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$ donc $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

★ Donc $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$.

Correction 24. indications.

1. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(pour montrer que c'est une base, on étudie le rang de la matrice des vecteurs en colonne, qui deviendra la matrice de passage si les vecteurs forment effectivement une base)

2. On note $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de u dans la base canonique.

Si X' est la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, alors $X = PX'$ soit $X' = P^{-1}X$.

On peut montrer que $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient donc $X' = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont $(-9, 13, 12)$.

Correction 25. réponses.

1. On peut montrer que la famille est libre (combinaison linéaire nulle ...), et on utilise le fait que $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4.

(ou on forme la matrice des coordonnées en colonne, qui correspond à Q et on montre que son rang est 4, le même que la taille de la matrice).

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (pivot de Gauss avec la matrice augmentée ou le système).

3. $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. Alors $V = Q^{-1}U = \begin{pmatrix} -a + b \\ a - c \\ c - d \\ d \end{pmatrix}$.

Correction 26.

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y, z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et λ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= (2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y'), (x + \lambda x') - (z + \lambda z')) \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= (2x + 3y, x - z) + \lambda(2x' + 3y', x' - z') \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

On note $\mathcal{B}_k$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$. Alors $\text{mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ et λ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } g(P + \lambda Q) &= 3(P + \lambda Q) + (P + \lambda Q)'(3) \\ &= 3P + 3\lambda Q + P'(3) + \lambda Q'(3) \\ &= 3P + P'(3) + \lambda(3Q + Q'(3)) \\ &= g(P) + \lambda g(Q) \end{aligned}$$

Donc g est linéaire.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction 27.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$2. AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ donc } f \circ g(x, y, z) = (2x + 2y - 2z, -2y, x - 4y - z)$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ donc } g \circ f(x, y) = (x + 3y, -2y).$$

Correction 28.

1. On note A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
 $f(1) = X \times 0 - 1 = -1$, $f(X) = X \times 1 - 1 = X - 1$ et $f(X^2) = X \times 2X - 1^2 = 2X^2 - 1$.
 Donc $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. La matrice A est échelonnée et de rang 3, donc $\text{Im}((\cdot) f)$ est de dimension 3, et elle est incluse dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 donc $\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]}$.
 Donc f est surjective, or c'est un endomorphisme, donc elle est aussi injective donc $\boxed{\text{Ker}(f) = \{0\}}$.

Correction 29.

1. Soient u et v dans $\mathbb{R}^2$, on note $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$.
 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.
 $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y')$ donc :

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= (x + \lambda x' + 2(y + \lambda y'), x + \lambda x', x + \lambda x' + y + \lambda y', 3(x + \lambda x') + 5(y + \lambda y')) \\ &= (x + 2y + \lambda(x' + 2y'), x + \lambda x', x + y + \lambda(x' + y'), 3x + 5y + \lambda(3x' + 5y')) \\ &= (x + 2y, x, x + y, 3x + 5y) + \lambda(x' + 2y', x', x' + y', 3x' + 5y') \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

 Donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$.
2. $(x, y) \in \text{Ker}(f) \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x = 0 \\ x + y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$.
 Donc $\boxed{\text{Ker}(f) = \{0\}}$ de dimension 0.
3. $(0, 1)$ et $(1, 0)$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f(1, 0) = (1, 1, 1, 3)$ et $f(0, 1) = (2, 0, 1, 5)$.
 Donc $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1, 3), (2, 0, 1, 5))}$.
 Les deux vecteurs forment une famille libre (ils ne sont pas colinéaires) donc $\text{Im}(f)$ est de dimension 2.
 (Ou d'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \dots$)

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. On note P la matrice de passage de $\mathcal{C}_2$ vers $\mathcal{B}_2$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}_4$ vers $\mathcal{B}_4$.

$$\text{On a } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \text{mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4}(f) = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(\text{on a } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Correction 30.

a : Rose ; b : Orange ; c : Jaune ; d : Blanc ; e : Rouge ; f : Vert clair ; g : Gris ; h : Vert foncé.
Bleu foncé correspond à $\emptyset$ (ne pas oublier l'ensemble de définition de l'équation !)

Correction 31. réponses.

- $3x + 2y - 7 = 0$
- $x - 2y + 3 = 0$
- $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- le projeté a pour coordonnées $(-\frac{8}{5}, \frac{21}{5})$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Correction 33. réponses.

- équation cartésienne $-2x - z + 3 = 0$ et système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -s + 1 \\ z = -2t + 1 \end{cases} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$
- équation cartésienne $x - y - 2z - 7 = 0$ et système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = s - 2 \\ y = 2t - 3s + 1 \\ z = -t + s - 3 \end{cases} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$
- équation cartésienne $2x - 3y + z = 0$ et système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -2t + 3s \end{cases} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$

Correction 34. réponses.

On cherche z tel que $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ soit nul. On trouve $z = 1$.

Correction 35. réponses et indications.

- les coordonnées sont $(\frac{1}{3}, 0, 1)$
- $G(-\frac{3}{2}, 4, 2)$
- on note $D(x, y, z)$, alors $\frac{1}{3}(1 + x, -2 + y, 2 + z) = (0, 0, 0)$ donc $x = -1$, $y = 2$ et $z = -2$.