Concours blanc
Lundi 17 juin, 8h - 12h

Calculatrice interdite.

Le sujet compte 4 exercices répartis en cinq pages.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

On pose pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.

2. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 0,\ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

3. En déduire les valeurs de I_1, I_2, I_3 et vérifier que :

$$I_4 = -\frac{7}{12} + \ln(2).$$

4. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

5. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge et que sa limite est 0.

6. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

7. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente et déterminer sa limite.

8. En utilisant **2.** et **4.**, montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n},$$

et en déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes U_1 , U_2 , U_3, … contenant chacune deux boules blanches. On effectue des tirages suivant le protocole suivant:

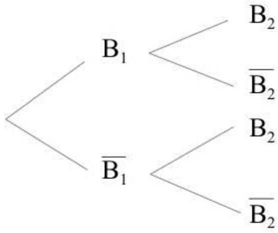
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3,

et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1} mais avant de procéder au tirage suivant. On pose $X_0=2$.

1) a) Déterminer $X_1(\Omega)$.

b) Pour $i\in\{1,2\}$, on note B_i l'événement: "la i° boule piochée dans l'urne U_0 est blanche".
Recopier et compléter l'arbre suivant:



c) Exprimer chacun des événements $(X_1=0)$, $(X_1=1)$, $(X_1=2)$ à l'aide des événements B_1 , B_2 .
Justifier que $P(X_1=0)=\dfrac{1}{6}$, $P(X_1=1)=\dfrac{2}{3}$, $P(X_1=2)=\dfrac{1}{6}$.

d) Calculer $E(X_1)$.

2) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note A_k l'événement : " on pioche deux boules noires dans l'urne U_k " .

a) Donner en justifiant $P(A_0)$, $P_{A_0}(A_1)$, $P_{A_0\cap A_1}(A_2)$.

b) Exprimer pour tout entier naturel n non nul, l'événement $(X_n=2)$ à l'aide des événements A_0 , A_1 , … .

c) En déduire que $P(X_n=2)=\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $P(X_{n+1}=1) = \dfrac{1}{2}P(X_n=1)+\dfrac{2}{3}P(X_n=2)$

b) Montrer ensuite par récurrence que tout entier naturel n non nul, on a : $P(X_n=1) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, donner la valeur de $P(X_n=0)$ en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a: $E(X_n)=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Déterminer la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$ et donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 3.

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

Partie I : une équation fonctionnelle.

On se propose dans cette partie de déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} f(1) = e, \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t). \end{cases} \qquad (\mathcal{E}_1)$$

1. Justifier que la fonction $x \mapsto e^x$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

On se propose de montrer que c'est la seule solution.
Pour cela, on suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions $(\mathcal{E}_1)$.

2. Pour tout nombre réel x, calculer $f(x)f(1-x)$.

3. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, puis que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que $f(0) = 1$.

5. Justifier que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $f'(s+t) = f'(s)f(t)$.

6. En donnant à s une valeur bien choisie, démontrer qu'il existe une constante a réelle telle que f soit solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + af(t) = 0 \end{cases}$.

7. Résoudre ce problème de Cauchy.

8. En utilisant le fait que $f(1) = e$, en déduire que le problème $(\mathcal{E}_1)$ a une solution unique que l'on donnera.

Partie II : équations différentielles à coefficients non constants.

9. Soit a une fonction continue sur un intervalle I.
On note A une primitive de a sur I. On a donc : $\forall x \in I,\ A'(x) = a(x)$.
L'objectif de cette question est de déterminer toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui sont solutions de l'équation $(\mathcal{H})\ \ y'(x) + a(x)y(x) = 0$.

- **(a)** Soit y une solution de l'équation $(\mathcal{H})$. Montrer que la fonction $h : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ est constante sur I.
- **(b)** Soit $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$, montrer que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{x \mapsto Ce^{-A(x)},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.
- **(c)** Application : résoudre l'équation différentielle $y' - \tan(x)y = 0$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

L'objectif de la suite est d'utiliser ce qui précède afin de trouver toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$ $xy' - y = x^3$.
On admet que les solutions d'une telle équation différentielle sont de la forme $y = y_P + y_H$ où y_P est une solution particulière de $(\mathcal{E}_2)$ et y_H est une solution de l'équation homogène $(\mathcal{H}_2)$ $xy' - y = 0$ associée à $(\mathcal{E}_2)$.

10. Vérifier que la fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^3$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_2)$.

11. Montrer que si y est solution de $(\mathcal{E}_2)$, alors $y(0) = 0$.

12.
- **(a)** Vérifier que pour tout $x \neq 0$, on a $(\mathcal{H}_2) \iff y' + a(x)y = 0$, avec $a(x) = -\dfrac{1}{x}$.
- **(b)** Donner une primitive de a sur $]0; +\infty[$, puis une primitive de a sur $]-\infty; 0[$.
  En déduire les solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $]0; +\infty[$, puis les solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $]-\infty; 0[$.

Résolution de $(\mathcal{E}_2)$:

13. Analyse : on suppose dans cette question que y est une solution de $(\mathcal{E}_2)$, et on admet qu'il existe donc deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} C_1 x + \frac{1}{2}x^3 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C_2 x + \frac{1}{2}x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Montrer dans ce cas que y est continue en 0.

(b) Montrer que y est dérivable en 0 si et seulement si $C_1 = C_2$.

14. Synthèse :

(a) Soit C_1 une constante réelle. Justifier que la fonction $y \ : \ x \mapsto C_1 x + \frac{1}{2}x^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation $(\mathcal{E}_2)$.

(b) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie III : exponentielle de matrices.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$: on dit que M est une matrice *nilpotente d'indice* 3.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $E(t) = I + tM + \dfrac{t^2}{2}M^2$.

15. Justifier que M n'est pas inversible.

16. Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$. En déduire que $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

17. Montrer que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $E(s)E(t) = E(s+t)$.

18. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est inversible et que $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $(E(t))^n = E(nt)$.

20. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E'(t) = ME(t)$.

Bonus. Justifier la notation $E(t) = e^{tM}$.

Exercice 4.

On rappelle ici les principaux résultats sur les applications linéaires.
Pour tous ces rappels, f est une application linéaire définie sur E à valeurs dans F.

Théorème du rang : si E de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Injectivité surjectivité :
f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.
f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

Image : l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $B = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E.
On définit l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ P & \mapsto & \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP \end{array}$

Partie I.
Dans cette partie uniquement on prend $n = 2$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$.

3. Donner une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ puis une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

4. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ? Justifier précisément.

5. Montrer que $B' = ((1-X)^2, X(1-X), X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

6. Calculer les images des vecteurs qui forment la base B' et les exprimer dans la base B'.

Partie II.
Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 quelconque et on admet que, comme à la partie **I.**, φ est un endomorphisme.

7. Calculer $\varphi(1)$ puis pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer $\varphi(X^k)$ en l'écrivant sous forme $a_k X^k + b_k X^{k+1}$.
On note $\mathcal{F}$ la famille $(\varphi(X^k))_{k \in [\![0,n]\!]}$.

8. On admet que la matrice des vecteurs de $\mathcal{F}$ en colonnes est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n-2}{n} & \frac{3}{n} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n-3}{n} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$

En déduire, en justifiant précisément, que $\mathrm{rg}(\varphi) = n$.

9. Montrer que $(X-1)^n \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et en déduire $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

10. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

(a) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\deg(P_k)$.

(b) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E.

(c) Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_k) = \frac{k}{n} P_k$.