Concours blanc de mathématiques

Vendredi 13 juin, 8h - 12h

Calculatrice interdite.

Le sujet compte 3 exercices répartis en 4 pages.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

définitions et notations utilisées

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

On note Id l'application identité de E.

Soient f , g deux endomorphismes de E, on note $f \circ g$ la composée de g suivie de f .

Pour tout entier k≥2, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots\ldots \circ f}_{\text{k fois}}$.

On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique s'il existe un vecteur a de E tel que (a , $f(a)$, $f^2(a)$, …, $f^{n-1}(a)$) soit une base de E.

Par exemple si n=2, l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur a de E tel que (a , $f(a)$) soit une base de E.

Enfin, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note deg(P) le degré de P.

Partie A: études d'exemples

I. On considère dans cette section que E= $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (4x-6y , x-y)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. a. Soit a =(2,3). Calculer $f(a)$ et montrer que (a , $f(a)$) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Que peut-on en déduire pour f ?
3. Vérifier que $f^2(a)$ =(-34,-9) puis déterminer les coordonnées de $f^2(a)$ dans la base (a , $f(a)$) .
4. Donner un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas cyclique.

II. On considère dans cette question que E= $\mathbb{R}^3$. On considère l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \longmapsto (2x , 4y-6z ,y-z)$

1. On admet que g est linéaire. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On admet que $g^2-3g+2Id=0$ où 0 désigne ici l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$. En déduire que g n'est pas cyclique.

Partie B: études d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Dans cette partie, on se donne un entier n supérieur ou égal à 2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme Q défini par Q(X)=P(X+1)-P(X).

On a donc par exemple $f(X^2-3X+1)=(X+1)^2-3(X+1)+1-(X^2-3X+1)=2X-2$.

On admettra que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on ne demande pas de le prouver.

I. Dans cette partie, on montre que f est cyclique.

1. a. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et vérifier que $f(X^2)=2X+1$.

   b. Soit k∈⟦1;n-1⟧. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que le polynôme $f(X^k)$ est de degré k-1.

2. On admet que pour tout P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1, on a deg($f(P)$) =deg(P)-1 .

Montrer alors que (X^{n-1} , $f(X^{n-1})$, $f^2(X^{n-1})$, …, $f^{n-1}(X^{n-1})$) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II. Dans cette partie, on détermine le noyau et l'image de de f .

1. En utilisant le résultat admis de I.2, montrer que le noyau de f est l'ensemble des polynômes constants.

2. a. Montrer que l'image de f est contenue dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

   b. En utilisant le théorème du rang, montrer que Im(f) = $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

III <u>(toute cette partie est en bonus).</u> On montre dans cette partie que f est cyclique d'une autre manière.

On définit les polynômes P_0 , P_1 , …, P_{n-1} de en posant :

$$P_0(X)=1 \ , \ P_1(X)=\frac{1}{1!}X \ , \ P_2(X)=\frac{1}{2!}X(X-1) \ , \ldots, \ P_{n-1}(X)=\frac{1}{(n-1)!}X(X-1)\ldots(X-n+2).$$

On a donc pour j∈ ⟦1;n-1⟧ , $P_j=\frac{1}{j!}X(X-1)\ldots(X-j+1)$.

1. Montrer que (P_0 , P_1 , …, P_{n-1}) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

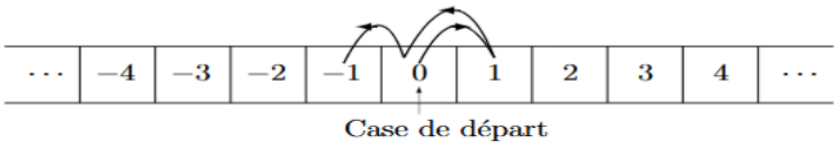
2. a. Soit j∈ ⟦1;n-1⟧ , montrer que $f(P_j)=P_{j-1}$.

   b. Pour i∈ℕ , déterminer $f^i(P_j)$ en distinguant les cas i≤j et i>j. On donnera la réponse sans justifier.

   c. En déduire une autre démonstration du fait que δ est cyclique.

Exercice 2.

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul. Une puce se déplace sur une bande formée de cases numérotées ainsi :



À chaque seconde, la puce effectue l'une des deux actions suivantes :
— ou bien elle saute d'une case vers la droite, (on dira que la puce " va à droite ")
— ou bien elle saute d'une case vers la gauche (on dira que la puce " va à gauche ").

Ces choix s'effectuent aléatoirement. On suppose que la probabilité que la puce aille à gauche est de $\frac{1}{2}$, que la probabilité que la puce aille à droite est de $\frac{1}{2}$, et que les différents sauts de la puce sont indépendants.

On appelle Y_n la variable aléatoire désignant le numéro de la case sur laquelle la puce se retrouve au bout des n sauts.

Partie A: cas n=2, puis n=3

1. Déterminer la loi de Y_2. On utilisera les événements G_1 : " au 1er saut, la puce va à gauche" , D_1 , G_2 , D_2 définis de manière analogue afin de justifier.

2. Calculer $E(Y_2)$ et $V(Y_2)$.

3. Donner sans justifier l'ensemble des valeurs prises par Y_3 .

Partie B: Étude de Y_n dans le cas général
On revient au cas général, n est donc un entier naturel non nul quelconque.

1. On appelle X_n le nombre de fois, parmi les n sauts effectués, où la puce va à droite.

a. Justifier que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Préciser $X_n(\Omega)$, $P(X_n=k)$ pour tout k$\in X_n(\Omega)$ ainsi que l'espérance et la variance de X_n .

2. Exprimer Y_n en fonction de X_n .

3. Donner l'espérance et la variance de Y_n en fonction de n. Interpréter la valeur de l'espérance.

Partie C: Étude de Y_n dans un autre cas
Dans cette dernière partie, on conserve le même cadre mais on modifie la loi des sauts de la puce. La puce part toujours de la case 0, et à chaque seconde, elle va à droite ou à gauche. Elle effectue n sauts, et les sauts de la puce sont toujours aléatoires. Par contre, on suppose que les sauts de la puce dépendent a priori du mouvement précédent ; cela se traduit par le phénomène suivant :

- si la puce vient d'aller à droite, alors elle a, à la seconde qui suit, une probabilité $\frac{2}{3}$ d'aller à droite, et une probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller à gauche ;

- si la puce vient d'aller à gauche, alors elle a, à la seconde qui suit, une probabilité $\frac{2}{3}$ d'aller à gauche, et une probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller à droite.

Enfin, lors du premier mouvement la puce part de la case 0 et va à droite avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et va à gauche avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour k$\in[\![1;n]\!]$, on appelle A_k l' événement : " À la seconde k, la puce va à droite ". On note $a_k = P(A_k)$.

1. D'après l' énoncé, quelle est la valeur de a_1 ?

2. Montrer que pour k$\in[\![1;n-1]\!]$, $a_{k+1}=\frac{1}{3}a_k+\frac{1}{3}$.

3. a. Pour k$\in[\![1;n]\!]$, on pose $b_k=a_k-\frac{1}{2}$. Montrer que pour tout entier k $\in[\![1;n-1]\!]$, on a $b_{k+1}=\frac{1}{3}b_k$.

b. Donner alors l'expression de b_k puis celle de a_k en fonction de l'entier naturel k.

4. On appelle Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si l' événement A_k est réalisé, et qui vaut -1 sinon.
Déterminer la loi de Z_k et calculer l'espérance de Z_k .

5. Expliquer pourquoi $Y_n = Z_1+Z_2+\ldots+Z_n$, puis calculer l'espérance de Y_n en fonction de n .

Exercice 3.

Partie A. Étude d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans cette partie, on étudie l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

5. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$.

7. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Partie B. Étude d'une somme.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on note $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k$.

1. Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(t)x^k$ valable pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x \in]-1,1[$.
En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)\,\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}.$$

2. En déduire que pour tout x de $]-1,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$.
On notera $S(x)$ cette intégrale.

3. On cherche dans cette question à calculer $S(x)$ par le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$.

(a) Justifier la formule $1 + \tan^2(a) = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$.

(b) Montrer que $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

(c) En déduire que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\,\mathrm{d}u$ pour tout $|x| < 1$.

(d) Déterminer alors l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.