Corrigé du Concours blanc

Correction 1.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(|1+x|)\Big]_0^1 = \boxed{\ln(2)}$.

2. $$\forall n \in \mathbb{N}\ I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \text{ par linéarité}$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\tfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$
$$= \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

3. Alors $I_0 + I_1 = \frac{1}{0+1}$ donc $\boxed{I_1 = 1 - \ln(2)}$

$I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$ donc $I_2 = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \boxed{-\frac{1}{2} + \ln(2)}$

$I_2 + I_3 = \frac{1}{3}$ donc $I_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln(2) = \boxed{\frac{5}{6} - \ln(2)}$

$I_3 + I_4 = \frac{1}{4}$ donc $I_4 = \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \ln(2) = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} + \ln(2) = \boxed{-\frac{7}{12} + \ln(2)}$.

4. $$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right)\mathrm{d}x \text{ par linéarité}$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Or $x \in [0,1]$, donc $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $1 + x \geqslant 0$, donc $\frac{x^n(x-1)}{1+X} \leqslant 0$.

Donc par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$ donc $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

5. $\forall n \geqslant 0, \forall x \in [0,1]$, $\frac{x^n}{1+x} \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.
Ainsi, (I_n) est décroissante et minorée, donc elle converge. On note ℓ sa limite.
Alors (I_{n+1}) est extraite de (I_n) donc converge aussi vers ℓ.
Donc d'après **2.**, en passant à la limite, $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$.
Donc $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } \ell}$.

6. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'égalité $(-1)^n I_n = \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $(-1)^1 I_1 = -I_1 = -1 + \ln(2)$.
Et $\ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^k}{k} = \ln(2) + \frac{(-1)^1}{1} = \ln(2) - 1$.
Donc l'égalité est vraie.

Hérédité : Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vraie, c'est-à-dire $(-1)^p I_p = \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{k}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

D'après **2.** $(-1)^{p+1}I_{p+1} = (-1)^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} - I_p\right)$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{(-1)^{p+1}}{p+1} + (-1)^2(-1)^p I_p \\ &= \tfrac{(-1)^{p+1}}{p+1} + \ln(2) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} \text{ d'après } \mathcal{P}(p) \\ &= \ln(2) + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^k}{k} \text{ CQFD} \end{aligned}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \geqslant 1, (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}}$.

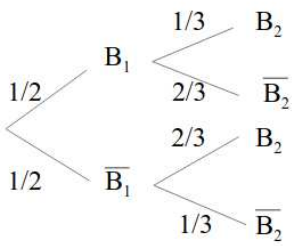
7. $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $I_n \geqslant 0$ donc $-I_n \leqslant (-1)^n I_n \leqslant I_n$.
Or (I_n) converge vers 0, donc par le théorème d'encadrement, $((-1)^n I_n)$ converge vers 0 aussi.
Or d'après la question précédente, $u_n = (-1)^n I_n - \ln(2)$, donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } -\ln(2)}$.

8. (I_n) est décroissante, donc $\forall n, I_{n+1} \leqslant I_n$, donc $I_n + I_{n+1} \leqslant 2I_n$
Donc d'après **2.**, $\frac{1}{n+1} \leqslant 2I_n$ donc $I_n \geqslant \frac{1}{2(n+1)}$.
De même, $I_n + I_{n+1} \geqslant 2I_{n+1}$ donc $\forall n \geqslant 0, I_{n+1} \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$.
Or $\forall n \geqslant 1$, $n-1 \geqslant 0$ donc $I_{(n-1)+1} \leqslant \frac{1}{2((n-1)+1)}$ autrement dit $I_n \leqslant \frac{1}{2n}$.
Finalement, on a bien $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n}}$.
Et ainsi, pour $n \geqslant 1$, $\frac{2n}{2(n+1)} \leqslant 2nI_n \leqslant 1$ (car $2n > 0$).
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{2(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{2n} = 1$, donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$.
Or $2nI_n = \dfrac{I_n}{\frac{1}{2n}}$ donc $\boxed{I_n \sim \frac{1}{2n}}$.

Correction 2.

1) a) Suivant ce qu'on a pioché dans U_0, l'urne U_1 peut contenir 0,1 ou 2 boules noires. $X_1(\Omega) = \{0;1;2\}$.

b)



c) $(X_1=0) = B_1 \cap B_2$, $(X_1=1) = (B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)$, $(X_1=2) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$

$P(X_1=0) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, de même $P(X_1=2) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$P(X_1=1) = P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

d) $E(X_1) = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 = 1$.

2) a) $P(A_0) = P(X_1=2) = \frac{1}{6}$.

Si on a tiré 2 boules noires dans U_0, on a alors 2 boules blanches et 2 boules noires dans U_1 et le 2° tirage se passe alors dans les mêmes conditions que le premier donc $P_{A_0}(A_1) = \frac{1}{6}$.

Si on a tiré 2 boules noires dans U_0 puis 2 boules noires dans U_1, on a alors 2 boules blanches et 2 boules noires dans U_2 et le 3° tirage se passe alors dans les mêmes conditions que les deux premiers donc $P_{A_0 \cap A_1}(A_2) = \frac{1}{6}$.

b) On aura $(X_n=2)$ si et seulement si on a pioché 2 boules noires à chaque étape.

$(X_n=2) = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1}$.

c) A l'aide des probabilités composées, $P(X_n=2) = P(A_0) \times P_{A_0}(A_1) \times \ldots \times P_{A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}}(A_{n-1})$

Chacun de ces facteurs vaut $\frac{1}{6}$ avec les mêmes explications qu'à la question précédente.

On a donc $P(X_n=2) = \prod_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3) $(X_n=0)$, $(X_n=1)$, $(X_n=2)$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}=1) = P(\ (X_{n+1}=1) \cap (X_n=0)\ ) + P(\ (X_{n+1}=1) \cap (X_n=1)\ ) + P(\ (X_{n+1}=1) \cap (X_n=1)\ )$$
$$= P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n=0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n=1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n=2)$$

Or $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 0$ car s'il n'y a pas de boule noire dans l'urne U_n , il ne peut y en avoir une dans l'urne U_{n+1} .

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}$ car l'urne U_n contient 1 noire et 3 blanches; dans ces conditions et en s'aidant d'un arbre, la probabilité de tirer la boule noire est $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = \frac{2}{3}$ car l'urne U_n contient 2 noires et 2 blanches et on a déjà calculé que dans ces conditions, la probabilité de tirer une seule noire est $\frac{2}{3}$.

Finalement, on a : $P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2} P(X_n=1) + \frac{2}{3} P(X_n=2)$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n : " $P(X_n=1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ ".

* P_1 est vrai car $P(X_1=1) = \frac{2}{3}$ et $2\left(\frac{1}{2}\right)^1 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{2} P(X_n=1) + \frac{2}{3} P(X_n=2) \\
&= \frac{1}{2} \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$
et donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $P(X_n=0) = 1 - P(X_n=1) - P(X_n=2) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

4°)
$$\begin{aligned}
E(X_n) &= 0 \times P(X_n=0) + 1 \times P(X_n=1) + 2 \times P(X_n=2) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

$-1<\frac{1}{2}<1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et donc $E(X_n) \to 0$

Pour n très grand, on peut espérer un nombre quasiment nul de boules noires dans l'urne U_n.

Correction 3.

Partie I.

1. La fonction exponentielle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de plus $e^1 = e$ et $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{s+t} = e^s e^t$.
Donc $\boxed{\text{la fonction exponentielle est bien solution de } (\mathcal{E}_1)}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(1-x) = f(x+1-x) = f(1) = \boxed{e}$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(1-x) \neq 0$ donc $f(x) \neq 0$.
Donc $\boxed{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}}$.
f est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle. Il ne contient pas 0 donc $f(\mathbb{R}) \subset]0,+\infty[$ ou $f(\mathbb{R}) \subset]-\infty, 0[$.
Or $e \in f(\mathbb{R})$, donc $f(\mathbb{R}) \subset]0,+\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est à valeurs strictement positives sur } \mathbb{R}}$.

4. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f(s+0) = f(s)f(0)$, c'est-à-dire $f(s) = f(s)f(0)$.
Comme $f(s) \neq 0$, on peut diviser par $f(s)$ et on obtient $\boxed{f(0) = 1}$.

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Les fonctions $s \mapsto f(s+t)$ (composée) et $s \mapsto f(s)f(t)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (car f l'est) et égales, donc leurs dérivées sont égales.
La dérivée de $s \mapsto s+t$ est $s \mapsto 1$, donc par composition, la dérivée de $s \mapsto f(s+t)$ est $s \mapsto f'(s+t)$.
Et $f(t)$ est constante, donc $\boxed{\forall s \in \mathbb{R}, f'(s+t) = f'(s)f(t)}$.

6. En prenant $s = 0$ dans la question précédente, on obtient : $f'(t) = f'(0)f(t)$.
On pose alors $a = -f'(0)$: $\boxed{f \text{ est solution du problème de Cauchy : } \begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) + af(t) = 0 \end{cases}}$.

7. Les solutions de l'équation différentielle (homogène) $f'(t)+af(t) = 0$ sont les fonctions $f \ : \ t \mapsto Ce^{-at}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
Or on veut $f(0) = 1$ et $f(0) = Ce^0 = C$, donc $C = 1$.
Donc $\boxed{\text{la solution } f \text{ est définie par } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{-at}}$.

8. Comme $f(1) = e$, on a $e^{-a} = e$ donc $-a = 1$ donc $a = -1$, donc $f(x) = e^x$.
Donc la seule solution potentielle est l'exponentielle, et elle est bien solution d'après **1.**.
$\boxed{(\mathcal{E}_1) \text{ a donc une unique solution : } f \ : \ x \mapsto e^x}$.

Partie II.

9. **(a)** $\forall x \in I, \ h'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x) \times A'(x)e^{A(x)}$
$= (y'(x) + y(x)a(x))e^{A(x)}$
$= 0$ car y solution de $\mathcal{H}$

Donc $\boxed{h \text{ est constante sur } I}$.

(b) Procédons par double inclusion :
- $\star$ Soit $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, alors d'après **(a)**, il existe une constante C telle que $\forall x \in I, y(x)e^{A(x)} = C$ donc $y(x) = Ce^{-A(x)}$.
- $\star$ Soit C un réel, et $g : x \mapsto Ce^{-A(x)}$, alors :
$\forall x \in I, \ g'(x) + a(x)g(x) = C(-A'(x))e^{-A(x)} + a(x)Ce^{-A(x)} = 0$ car $A'(x) = a(x)$
Donc g est dans $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

On a donc bien $\boxed{\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{x \mapsto Ce^{-A(x)}, \ C \in \mathbb{R}\right\}}$.

(c) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos x} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$ donc une primitive de tan est $x \mapsto -\ln(|\cos(x)|)$ et cos est à valeurs positives sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc on peut enlever la valeur absolue.
Donc les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-\ln(\cos(x))}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Or $e^{-\ln(\cos(x))} = \frac{1}{e^{\ln(\cos(x))}} = \frac{1}{\cos(x)}$.
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\, x \mapsto C\frac{1}{\cos(x)},\ C \in \mathbb{R}\right\}}$.

10. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{3}{2}x^2$.
Or, pout tout $x \in \mathbb{R}$, $x \times \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 = x^3$.
Donc $\boxed{\text{la fonction } x \mapsto \dfrac{1}{2}x^3 \text{ est une solution particulière de } (\mathcal{E}_2)}$.

11. Si y est solution de $(\mathcal{E}_2)$, alors on a pour $x = 0$: $0y'(0) - y(0) = 0$, c'est-à-dire $\boxed{y(0) = 0}$.

12. **(a)** Pour tout $x \neq 0$, $(\mathcal{H}_2)\ :\ xy' - y = 0 \iff y' - \dfrac{1}{x}y = 0 \iff \boxed{y' + a(x)y = 0 \text{ avec } a(x) = -\dfrac{1}{x}}$.

(b) On sait que si la fonction u ne s'annule pas, alors $\dfrac{u'}{u}$ est la dérivée de $\ln(|u|)$.
• Pour $x \in]0; +\infty[$, on a donc $A(x) = -\ln(|x|) = -\ln(x)$ et d'après la question **9.(b)**
$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{H}_2) \text{sont les fonction définies par } y_H(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{\ln(x)} = Cx, \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$.
• Pour $x \in]-\infty; 0[$, on a $A(x) = -\ln(|x|) = -\ln(-x)$ et d'après la question **9.(b)**,
$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{H}_2) \text{ sont les fonction définies par } y_H(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{\ln(-x)} = -Cx, \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

13. **(a)** $\star \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} C_1x + \dfrac{1}{2}x^3 = 0$
$\star \lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} C_2x + \dfrac{1}{2}x^3 = 0$
$\star\ y(0) = 0$
Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = y(0)$ donc $\boxed{y \text{ est continue en } 0}$.

(b) • À gauche $(h \to 0^-)$: $\dfrac{y(0+h) - y(0)}{h} = \dfrac{C_2h + \frac{1}{2}h^3 - 0}{h} = C_2 + \dfrac{1}{2}h^2 \underset{h\to 0^-}{\longrightarrow} C_2$
donc y dérivable à gauche et $y'_g(0) = C_2$
• À droite $(h \to 0^+)$: $\dfrac{y(0+h) - y(0)}{h} = \dfrac{C_1h + \frac{1}{2}h^3 - 0}{h} = C_1 + \dfrac{1}{2}h^2 \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} C_1$
donc y dérivable à droite et $y'_d(0) = C_1$
Donc $\boxed{y \text{ est dérivable en } 0 \text{ si et seulement si } C_1 = C_2}$.

14. **(a)** y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (polynôme).
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $xy'(x) - y(x) = x\left(C_1 + \dfrac{3}{2}x^2\right) - \left(C_1x + \dfrac{1}{2}x^3\right) = C_1x + \dfrac{3}{2}x^3 - C_1x - \dfrac{1}{2}x^3 = x^3$
$\boxed{y \text{ est donc solution de } (\mathcal{E}_2)}$.

(b) Par bilan d'analyse, les seules solutions possibles de $(\mathcal{E}_2)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto C_1x + \frac{1}{2}x^3$, et d'après la synthèse, ces fonctions sont bien des solutions.
Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Cx + \frac{1}{2}x^3,\ C \in \mathbb{R}\right\}}$.

Partie III.

15. Le produit de matrices inversibles est inversible, donc si M est inversible, alors M^2, puis M^3 sont inversibles. La matrice nulle n'étant pas inversible, c'est absurde que M soit inversible.
Donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

16. $(I-M)(I+M+M^2) = I+M+M^2-M-M^2-M^3 = I-M^3 = I$.
Donc $\boxed{I-M \text{ est inversible et } (I-M)^{-1} = I+M+M^2}$

17. Soit $(s,t)\in\mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= \left(I+sM+\frac{s^2}{2}M^2\right)\left(I+tM+\frac{t^2}{2}M^2\right)\\ &= I+tM+\frac{t^2}{2}M^2+sM+tsM^2+0+\frac{s^2}{2}M^2+0+0\\ &= I+(s+t)M+\frac{s^2+2st+t^2}{2}M^2\\ &= E(s+t) \text{ car } (s+t)^2 = s^2+2st+t^2 \end{aligned}$$

18. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $E(t)E(-t) = E(t+(-t)) = E(0) = I+0M+0M^2 = I$.
Donc $\boxed{E(t) \text{ est inversible et } (E(t))^{-1} = E(-t)}$.

19. On note $\mathcal{P}(n)$: $\forall t\in\mathbb{R}, (E(t))^n = E(nt)$.

Initialisation : $E(t)^0 = I$ et $E(0) = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\forall t\in\mathbb{R}, (E(t))^k = E(kt)$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \forall t\in\mathbb{R},\ (E(t))^{k+1} &= E(t)(E(t))^k\\ &= E(t)E(kt) \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= E(t+kt) \text{ d'après } \textbf{17.}\\ &= E((k+1)t) \end{aligned}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R}, (E(t))^n = E(nt)}$.

20. Comme $E(t) = I+tM+\frac{1}{2}t^2M^2$, $E'(t) = 0+1M+\frac{1}{2}2tM^2 = M+tM^2$.
De plus, $ME(t) = M(I+tM+\frac{t^2}{2}M^2) = M+tM^2+0 = E'(t)$.
On a donc bien $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ E'(t) = ME(t)}$.

Bonus. E est solution de $y'-My=0$ avec $E(0)=I$, donc par analogie avec les équations différentielles réelles, on peut écrire $E(t) = e^{-tM}$.

Correction 4.

1°) $\forall P,Q\in E$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P+\mu Q) &= \frac{1}{2}X(1-X)(\lambda P+\mu Q)' + X(\lambda P+\mu Q)\\ &= \frac{1}{2}X(1-X)(\lambda P'+\mu Q')+\lambda XP+\mu XQ\\ &= \lambda\left(\frac{1}{2}X(1-X)P'+XP\right) + \mu\left(\frac{1}{2}X(1-X)Q'+XQ\right)\\ &= \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

φ est une application linéaire de E dans E donc c'est un endomorphisme de E.

2°) $\varphi(1) = \frac{1}{2}X(1-X)\times 0+X\times 1 = X$,

$\varphi(X) = \frac{1}{2}X(1-X)\times 1+X\times X = \frac{1}{2}X-\frac{1}{2}X^2+X^2 = \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}X^2$,

$\varphi(X^2) = \frac{1}{2}X(1-X)\times 2X+X\times X^2 \quad X^2-X^3+X^3 = X^2$.

3°) Soit $P\in E$, on note $P = aX^2+bX+c$.

Alors $\varphi(P) = \frac{1}{2}X(1-X)(2aX+b) + X(aX^2+bX+c)$
$= \frac{1}{2}X(2aX+b-2aX^2-bX) + aX^3+bX^2+cX$
$= aX^2 + \frac{1}{2}bX - aX^3 - \frac{b}{2}X^2 + aX^3 + bX^2 + cX$
$= (a+\frac{b}{2})X^2 + (\frac{b}{2}+c)X$

Donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \begin{cases} a+\frac{b}{2}=0 \\ \frac{b}{2}+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=c \\ b=-2c \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{cX^2-2cX+c, c\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(X^2-2X+1)$.
Le polynôme X^2-2X+1 n'est pas nul donc il forme une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\mathrm{Im}\,(()\,\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\varphi(1),\varphi(X),\varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}\left(X, \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}X^2, X^2\right)$ (images des polynômes de la base canonique)
Or d'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))+\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi))$ donc $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est de dimension 2.
X et X^2 sont de degrés différents donc ils forment une famille libre dans $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.
Donc (X,X^2) est une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

4°) $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ donc φ n'est pas injectif. rg(φ)<3 donc φ n'est pas surjectif.

On peut aussi utiliser le fait que pour un endomorphisme φ en dimension finie, on a les équivalences suivantes :

φ injectif ⇔ φ surjectif ⇔ φ bijectif

φ n'étant pas injectif, il n'est donc pas surjectif.

5°) Montrons que B' est libre. Soient a,b,c réels tels que $a(1-X)^2+bX(1-X)+cX^2=0$.

En évaluant en 0,1,2 , on obtient: $\begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ a-2b+4c=0 \end{cases}$ donc a=b=c=0 et donc B' est libre.

$\begin{cases} \text{card(B')}=3=\dim(\mathbb{R}_2[X]) \\ \text{B' est libre} \end{cases}$ donc B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

6°) On trouve $\varphi((1-X)^2)=0$, $\varphi(X(1-X))=\frac{1}{2}X(1-X)$ et $\varphi(X^2)=X^2$.

Partie II:

7°) $\varphi(1)=X$ et pour $k\in[\![1;n]\!]$, $\varphi(X^k) = \frac{1}{n}X(1-X)k\,X^{k-1}+X\times X^k = \frac{k}{n}X^k(1-X)+X^{k+1} = \frac{k}{n}X^k+\left(1-\frac{k}{n}\right)X^{k+1}$.

8°) Le rang de cette matrice est le rang de la famille $\mathcal{F}$.
Or $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = \mathrm{Im}\,(\varphi)$ car $\mathcal{F}$ correspond aux images des vecteurs de la base canonique de E (donc famille génératrice de E).
Donc le rang de φ correspond au rang de M.
Or en plaçant la première ligne en dernière position, on a une matrice échelonnée avec n pivots qui sont 1, $\frac{n-1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}$, donc le rang de la matrice est n.
Donc φ est de rang n.

9°) $\varphi\left((X-1)^n\right) = \frac{1}{n}X(1-X)n(X-1)^{n-1} + X(X-1)^n = -X(X-1)(X-1)^{n-1} + X(X-1)^n = 0$.

Donc $(X-1)^n \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

A l'aide du théorème du rang, on a : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \mathrm{rg}(\varphi) = n+1-n = 1$.

On a vect($(X-1)^n$) $\subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ et ces 2 sev sont de même dimension donc ils sont égaux.

10°) a) Pour $k\in[\![0;n]\!]$, $d°(P_k) = d°(X^k) + d°((1-X)^{n-k}) = k+n-k = n$.

b) Montrons la liberté : soient a_0, …., a_n réels tels que $a_0 P_0 + ... + a_n P_n = 0$

En considérant le coefficient constant on a $a_0 = 0$, puis en considérant le coefficient en X, on a $a_1 = 0$ et ainsi de suite jusqu'au coefficient en X^n , on trouve que tous les coefficients sont nuls.

$\begin{cases} \text{card}((P_0, P_1, \dots, P_n)) = n+1 = \dim(E) \\ (P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est libre} \end{cases}$ donc $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E.

c) $\varphi(P_n) = \varphi(X^n) = \frac{n}{n} X^n$ (d'après1°) = $\frac{n}{n} P_n$.

$\varphi(P_0) = \varphi((1-X)^n) = 0 = \frac{0}{n} P_0$ (car $(X-1)^n \in \text{Ker}(\varphi)$) .

Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, $\varphi(P_k) = \frac{1}{n} X(1-X)[k X^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k) X^k (1-X)^{n-k-1}] + X^{k+1}(1-X)^{n-k}$

$$= \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k+1} - \frac{n-k}{n} X^{k+1}(1-X)^{n-k} + X^{k+1}(1-X)^{n-k}$$

$$= P_k \left(\frac{k}{n}(1-X) - \frac{n-k}{n} X + X \right)$$

$$= P_k \left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n} X - X + \frac{k}{n} X + X \right)$$

$$= \frac{k}{n} P_k$$

En toute rigueur, on traite P_0 et P_n à part car on peut difficilement écrire que le polynôme dérivé de X^0 est $0 X^{-1}$.

Le souci étant que X^{-1} n'a pas de sens. A votre niveau, on peut tolérer que vous le fassiez.