Limites

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

★ Exercice 1.

Justifier avec des quantificateurs, les limites usuelles suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ **(c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Le but est de montrer par l'absurde que f n'a pas de limite en 0. On commence donc par supposer que la limite de f en 0 existe et vaut ℓ (nombre réel ou éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$.
Déterminer la limite de (u_n), et en déduire la limite de $f(u_n)$.

2. Calculer $f(u_n)$ et conclure sur l'existence ou non de la limite de f en 0.

3. Tracer la courbe de f sur la calculatrice pour confirmer.

☞ Exercice 3.

Étudier la limite en a de la fonction f dans chacun des cas :

1. $a = 1$ et $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

2. $a = +\infty$ et $f(x) = \ln(1+2e^x) - x$

3. $a = 0$ et $f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor$

4. $a = +\infty$ et $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Correction.

3. $\forall y \in \mathbb{R}, \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$
Donc d'une part $\lfloor y \rfloor \leqslant y$.
D'autre part $y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc $y - 1 < \lfloor y \rfloor$.
Donc $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.
Donc $\frac{1}{x^2} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x^2}$ donc en multipliant par x^2 qui est positif, $1 - x^2 < f(x) \leqslant 1$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} 1 - x^2 = 1$ donc d'après le théorème d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1}$.

Exercice 4.

Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ (en 0 et $+\infty$) ; $g(x) = x + \sqrt{x}$ (en 0 et $+\infty$) ; $h(x) = \ln(2-x)$ (en 1)
$k(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ (en 0 et $+\infty$) ; $\ell(x) = e^x - 1 + x^2 + \sin^3(x)$ (en 0).

☞ Exercice 5.

Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en 0 :

$f(x) = \dfrac{e^x \sin(3x)}{x - \frac{3}{2}\sin(2x)}$ $h(x) = \dfrac{x\ln(x)}{\sin(x)}$ ★ $\ell(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

$g(x) = \dfrac{x+\ln(x)}{\sin(x)}$ $k(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^x-1}$