# Applications linéaires.
## B - Matrices d'applications linéaires

### ☞ Exercice 1.

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés :

**1.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y)$
**2.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$
**3.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y)$
**4.** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z)$

### Exercice 2.

Soit $\phi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\phi : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.
**1.** Déterminer la matrice de $\phi$ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
**2.** En déduire $\mathrm{Im}(\phi)$ et $\mathrm{Ker}(\phi)$.

### ☞ Exercice 3.

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
**1.** Déterminer l'expression de $f\Big((x, y, z)\Big)$.
**2.** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

### ☞ Exercice 4.

$f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans les bases canoniques est
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.
Déterminer $f(X^2 - 3)$ et $f(2X^3 + 4X)$.

### ☞ Exercice 5.

On définit les applications suivantes :
$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], P \mapsto XP' - P$
$g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto P(1) + (X - 1)P'(1)$
$h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_4[X], P \mapsto (X^2 + 1)P - 2XP$
**1.** Déterminer les matrices de ces applications linéaires dans les bases canoniques.
**2.** Déterminer la matrice de $h$ dans les bases $\mathcal{B}' = (1, X - 1, X^2 - X - 1)$ pour $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}'' = (1, X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1, X^4 - 1)$ pour $\mathbb{R}_4[X]$.

### Exercice 6.

**1.** Donner la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ :
$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$
$g(x, y, z) = (2x - y, 5x - 3y + z)$
$h(x, y, z) = (x - 5y - z, -x + y, 2z)$
**2.** On note $\psi$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\psi = f \circ g \circ h$.
Donner la matrice de $\psi$ dans les bases canoniques, puis son expression.

### Exercice 7.

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.
**1.** On note $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3,$ et $\quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.
Montrer que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$, on la notera $\mathcal{B}'$.
**2.** Calculer $f(e'_1), f(e'_2)$ et $f(e'_3)$, et en déduire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

## ☞ Exercice 8.

Soit $E$ un espace vectoriel dont on note une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On note $\mathcal{B}'$ la famille $(e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$ et on admet que $\mathcal{B}'$ est aussi une base de $E$.

**1.** Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. On notera $P$ cette matrice.

**2.** Soit $x \in E$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(2, -1, 4)$.
Déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$.

**3.** Soit $\phi$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice $M'$ de $\phi$ dans la base $\mathcal{B}'$.

## Exercice 9.

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à $A$.
Soient $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 0, 0)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de $f$ dans cette nouvelle base.

## Exercice 10.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
$A$ est la matrice de l'application linéaire $f$ dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.
Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique, et en déduire pour tout $(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ l'expression de $f(x, y, z)$.

## Exercice 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ 4 & 5 & 6 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$.

**1.** Écrire l'application linéaire $f$ canoniquement associée à $A$.

**2.** Déterminer le noyau et l'image de $A$.

## ★ Exercice 12.

Soit $u$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui même définie par :
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ u(x, y, z) = (x + y, 7x - y - 8z, -x + y + 2z).$$

**1.** Démontrer que $u$ est linéaire et écrire la matrice $A$, représentative de $u$ dans la base canonique.

**2.** **(a)** Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur $e_1$ d'abscisse 1.

**(b)** Démontrer que $e_1 \in \mathrm{Im}(u)$ et donner un antécédent $e_2$ de $e_1$ par $u$.
En déduire que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

**3.** Compléter la famille $(e_1, e_2)$ en une base $\mathcal{B}$ de façon à ce que la matrice représentative de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Quel est le lien entre $A$ et $T$ ? Vérifier à la calculatrice.