

# APPLICATIONS LINÉAIRES

## B - Matrices d'applications linéaires

Dans ce chapitre,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p$ , une base est  $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ , et  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , une base est  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

### I. Matrice d'une application linéaire et application linéaire associée à une matrice

#### 1) Matrice d'une application linéaire

Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors  $f$  est entièrement définie par  $f(u_1), f(u_2), \dots$  et  $f(u_p)$ . Ces vecteurs sont dans  $F$ , on peut donc les décomposer dans la base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{1,1}v_1 + a_{2,1}v_2 + \dots + a_{n,1}v_n \\ f(u_2) &= a_{1,2}v_1 + a_{2,2}v_2 + \dots + a_{n,2}v_n \\ &\vdots \\ f(u_p) &= a_{1,p}v_1 + a_{2,p}v_2 + \dots + a_{n,p}v_n. \end{aligned}$$

**Définition.**

On appelle matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  la matrice  $A$  de terme général  $a_{i,j}$  qui est la  $i$ -ème coordonnée de  $f(u_j)$  dans la base  $\mathcal{F}$ .

Ainsi,  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $A = \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) =$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{i,j} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ f(u_1) & & f(u_j) & & f(u_n) \end{matrix}$ 

 $\begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_i \\ \leftarrow v_n \end{matrix}$



**Méthode :** pour déterminer la matrice d'une application linéaire  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  :

1. calculer tous les  $f(u_j)$  où les  $u_j$  sont les vecteurs de la base  $\mathcal{B}_E$
2. exprimer chacun de ces vecteurs dans la base  $\mathcal{B}_F$
3. mettre les coordonnées en colonne dans la matrice.

**Exemples :**

•  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (2x - 3y; 4x; x - y) \end{cases}$  on cherche la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  (notée  $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2)$ ) et  $\mathbb{R}^3$  (notée  $\mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, v_3)$ ).

•  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ .

On cherche  $A$ , la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$ .

**Propriété.**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et  $A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$ .  
 Pour tout  $x$  de  $E$ , on note  $X$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{E}$ .  
 On note  $y = f(x)$ , et  $Y$  la matrice colonne des coordonnées de  $y$  dans la base  $\mathcal{F}$ .  
 Alors  $Y = AX$ .

**Exemple :** avec l'application  $f$  précédente :  $P \mapsto P'$ .

Soit  $P = 3 + X - X^2 + 2X^3$ , on note  $U$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{E}$  :  $U = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ .

**Bilan :**

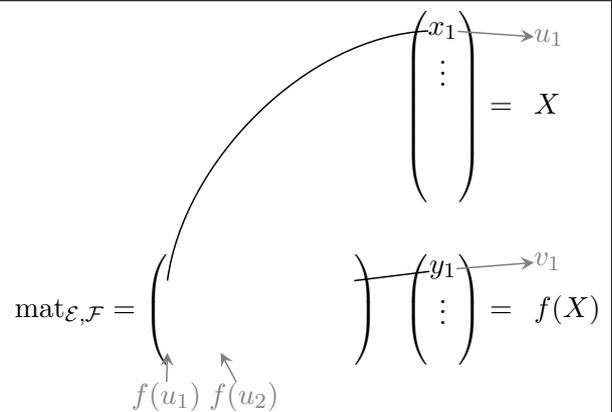
$E$  de base  $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$

$F$  de base  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$$x = \sum_{k=1}^p x_k u_k$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^p x_k f(u_k) = \sum_{k=1}^n y_k v_k$$



**2) Application linéaire associée à une matrice**

**Propriété.**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions respectives  $p$  et  $n$  dans lesquels on fixe deux bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ .

Alors l'application  $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un isomorphisme.  
 $f \mapsto \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$

Donc en particulier  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = n \times p$ .

**Conséquence,** avec des bases fixées, on peut associer à toute matrice, une unique application linéaire.

**Définition.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on appelle **application linéaire canoniquement associée à  $A$** , l'application de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$  dont la matrice dans les bases canoniques est  $A$ .

**Exemple :**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

Déterminons l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  que l'on notera  $f$ .

### 3) Opérations sur les matrices et les applications linéaires

Les opérations sur les matrices sont compatibles avec les opérations sur les applications linéaires :

**Propriété.**

- Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , et leurs matrices dans les mêmes bases sont  $A$  et  $B$ , alors la matrice de  $f + g$  est  $A + B$  et la matrice de  $\lambda f$  est  $\lambda A$ . (*linéarité de l'application  $\varphi$* )
- Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , avec  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  des bases respectives de  $E$ ,  $F$  et  $G$ . Alors  $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g)\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$ . *attention à l'ordre des bases !*

**Justification du deuxième • :** Soit  $x \in E$ , on note  $y = f(x)$  et  $z = g(y)$  soit  $z = g \circ f(x)$ .  $X$  (respectivement  $Y, Z$ ) est la matrice colonne des coordonnées de  $x$  (respectivement  $y, z$ ) dans la base  $\mathcal{E}$  (respectivement  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ ).  
On note  $A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$  et  $B = \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g)$ .

**Conséquence :** la matrice d'un isomorphisme est inversible et son inverse est la matrice de l'endomorphisme réciproque.  
En effet, supposons que  $u$  soit un isomorphisme, on note  $u^{-1}$  son isomorphisme réciproque.

**Propriété de caractérisation des isomorphismes.**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et on note  $M$  sa matrice dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ .  
 $u$  est un isomorphisme si et seulement si  $M$  est inversible.  
Et alors,  $\text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u^{-1}) = (\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u))^{-1}$ .

## II. Changement de base

### 1) Matrice de passage

**Définition.**

On dispose de deux bases de  $E$  :  
 $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  (dénommée « ancienne base »)  
et  $\mathcal{E}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$  (que l'on appellera « nouvelle base »).  
Les vecteurs de  $\mathcal{E}'$  se décomposent dans la base  $\mathcal{E}$  :  $u'_1 = \sum_{k=1}^p a_{k,1}u_k$ .  
On appelle **matrice de passage** de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{E}'$  la matrice  $(a_{i,j})_{i,j \in [1,p]}$ .  
Autrement dit il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base, décomposés selon l'ancienne base.

$$P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \rightarrow u_1 \\ \rightarrow u_2 \\ \vdots \\ \rightarrow u_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow u'_1 & \uparrow u'_2 & \dots & \uparrow u'_p \end{pmatrix}$$

**Remarque :** cette matrice est en fait  $\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{Id}_E)$ , elle est donc inversible, et son inverse est la matrice de passage de la base  $\mathcal{E}'$  vers la base  $\mathcal{E}$ .

**Exemple :** dans  $\mathbb{R}_2[X]$  on note  $\mathcal{E}$  la base canonique  $(1, X, X^2)$  et  $\mathcal{E}'$  la base  $(1, X - 1, X^2 - 2X + 2)$ .

La matrice de passage de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{E}'$  est  $P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

## 2) Changement de coordonnées

### Propriété.

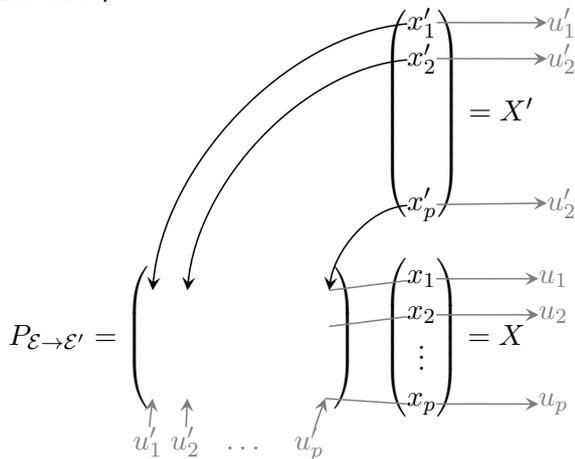
Soit  $x$  un vecteur de  $E$ , on note  $X$  (respectivement  $X'$ ) la matrice de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{E}$  (respectivement  $\mathcal{E}'$ ).

On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{E}$  vers la base  $\mathcal{E}'$ .

Alors  $X = PX'$  ou  $X' = P^{-1}X$ .



En effet,



$$\begin{aligned} \text{En fait, } x &= \sum_{k=1}^p x'_k u'_k \\ &= \sum_{k=1}^p x'_k \left( \sum_{i=1}^p a_{i,k} u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p x'_k a_{i,k} u_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left( \sum_{k=1}^p x'_k a_{i,k} \right) u_i \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x_i = \sum_{k=1}^p a_{i,k} x'_k.$$

**Suite de l'exemple :** on donne  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et on cherche les coordonnées du polynôme  $Q = X^2 - X + 3$

dans la base  $\mathcal{E}'$ .

On note  $U$  la matrice des coordonnées de  $Q$  dans la base canonique, et  $U'$  la matrice des coordonnées de  $Q$  dans la base  $\mathcal{E}'$ .

## 3) Changement de bases pour la matrice d'une application linéaire

**Données :**  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$E$  est de dimension  $p$ , deux bases :  $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $\mathcal{E}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$

$P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{E}'$

$F$  est de dimension  $n$ , deux bases :  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{F}' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$

$Q$  est la matrice de passage de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{F}'$ .

$A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$  et  $A' = \text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(f)$ .

**Lien entre  $A$  et  $A'$  :**  $A' = Q^{-1}AP$ .



**Justification :** soit  $x \in E$  :  $X$  la matrice de ses coordonnées dans  $\mathcal{E}$ ,  $X'$  dans  $\mathcal{E}'$ .

On note  $y = f(x)$  et  $Y$  la matrice des coordonnées de  $y$  dans  $\mathcal{F}$ , et  $Y'$  dans  $\mathcal{F}'$ .

**Cas particulier d'un endomorphisme :**  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  deux bases de  $E$  et toujours  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{E}'$ .

On note  $A = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f)$  ( $\mathcal{E}$  est la base de départ et d'arrivée), et  $A' = \text{mat}_{\mathcal{E}'}(f)$ .

Alors  $A' = P^{-1}AP$ .

**Exemple :**  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par  $f((x, y, z)) = (2x + 2y + z; x + 3y + z; x + 2y + 2z)$ .

a) Déterminer  $A$ , matrice de  $f$  dans la base canonique.

b) On donne  $\mathcal{E}'$  la base formée de  $u_1 = (2, -1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 0, -1)$  et  $u_3 = (1, 1, 1)$ .

Déterminer  $P$  la matrice de passage de la base canonique vers  $\mathcal{E}'$ . On donne  $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $A'$ , matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{E}'$ .

### Définition.

Deux matrices carrées  $A$  et  $A'$  sont dites **semblables** si il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A' = P^{-1}AP$ .

## III. Bilan sur le rang

### 1) Les différentes notions de rang

Nous avons vu plusieurs notions de rang selon le contexte, mais elles se ramènent toutes à une matrice.

Le **rang d'une famille de vecteurs** est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Le **rang d'une application linéaire** est la dimension de son image :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \text{ autrement dit } \text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

(avec  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ )

Le **rang d'une matrice** est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice.

C'est donc aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de sa matrice.

Ainsi, le **rang d'une famille de vecteurs** est aussi le rang de la matrice de ses vecteurs en colonnes.

Et le **rang d'une application linéaire** est aussi le rang de sa matrice.

Les deux caractéristiques précédentes sont valables dans n'importe quelles bases : voir propriété ci-dessous.

### Propriété.

Le rang d'une matrice ne change pas lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.  
En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Le **rang d'une matrice** est le nombre de pivots d'une matrice échelonnée équivalente.

**Par exemple :** on détermine le rang de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & -15 \end{pmatrix}$

On peut montrer que  $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée qui a 2 pivots.  
Donc  $A$  est de rang 2 (donc n'est pas inversible).

**Propriété.**



Une matrice carrée de taille  $n$  est inversible si et seulement si son rang est  $n$ .

Le **rang d'un système** est le nombre de pivots (visible lorsque le système est échelonné).  
C'est aussi le rang de la matrice associée au système.

**Remarque :** le rang d'une matrice est aussi le rang de ses vecteurs lignes.

**2) Théorème du rang adapté aux matrices**

**Définition.**

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

On appelle **noyau** de  $A$  l'ensemble des antécédents de  $0_n$  par  $X \mapsto AX$ .

Le noyau est une partie de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  et est noté  $\text{Ker}(A) : \text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_n\}$ .

**Définition.**

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

On appelle **image** de  $A$  l'ensemble des images de l'application  $X \mapsto AX$ .

L'image est une partie de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et est noté  $\text{Im}(A) :$

$$\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\} \quad \text{ou} \quad \text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

**Remarque :** l'image d'une application linéaire est générée par les images des vecteurs d'une base.  
Or les colonnes de  $A$  correspondent aux images des vecteurs de la base canonique.  
Donc, en notant  $A_1, A_2 \dots A_p$  ces colonnes, on obtient  $\text{Im}(A) = \text{Vect}(A_1, A_2, \dots, A_p)$ .

**Exemple :** déterminer une base de l'image de  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Théorème du rang (version matricielle).**

nombre de colonnes de  $A = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A)$

**Explication :** on applique le théorème du rang à l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

**Trouver des équations du noyau et de l'image d'une matrice :**

On note  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -7 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ .