

APPLICATIONS LINÉAIRES

B - Matrices d'applications linéaires

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p , une base est $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$, et F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , une base est $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

I. Matrice d'une application linéaire et application linéaire associée à une matrice

1) Matrice d'une application linéaire

Si f est une application linéaire de E dans F , alors f est entièrement définie par $f(u_1)$, $f(u_2)$, ... et $f(u_p)$. Ces vecteurs sont dans F , on peut donc les décomposer dans la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$:

$$f(u_1) = a_{1,1}v_1 + a_{2,1}v_2 + \dots + a_{n,1}v_n$$

$$f(u_2) = a_{1,2}v_1 + a_{2,2}v_2 + \dots + a_{n,2}v_n$$

$$\vdots$$

$$f(u_p) = a_{1,p}v_1 + a_{2,p}v_2 + \dots + a_{n,p}v_n.$$

Définition.

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ la matrice A de terme général $a_{i,j}$ qui est la i -ème coordonnée de $f(u_j)$ dans la base $\mathcal{F}$.

Ainsi, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $A = \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) =$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & a_{i,j} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} & & & & \nearrow v_1 \\ & & & & \nearrow v_i \\ & & & & \nearrow v_n \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \uparrow f(u_1) & \uparrow f(u_j) & \uparrow f(u_n) \end{matrix}$



Méthode : pour déterminer la matrice d'une application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$:

1. calculer tous les $f(u_j)$ où les u_j sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$
2. exprimer chacun de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}_F$
3. mettre les coordonnées en colonne dans la matrice.

Exemples :

- $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (2x - 3y; 4x; x - y) \end{cases}$ on cherche la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ (notée $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2)$) et $\mathbb{R}^3$ (notée $\mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, v_3)$).

- $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$.

On cherche A , la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3)$.

Propriété.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$.

Pour tout x de E , on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$.

On note $y = f(x)$, et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans la base $\mathcal{F}$.

Alors $\boxed{Y = AX}$.

Exemple : avec l'application f précédente : $P \mapsto P'$.

Soit $P = 3 + X - X^2 + 2X^3$, on note U la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$: $U = \begin{pmatrix} \dots \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix}$.

Bilan :

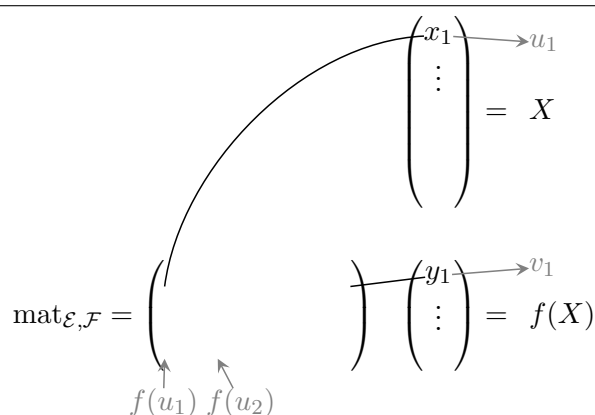
E de base $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$

F de base $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$x = \sum_{k=1}^p x_k u_k$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^p x_k f(u_k) = \sum_{k=1}^n y_k v_k$$

**2) Application linéaire associée à une matrice****Propriété.**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n dans lesquels on fixe deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Alors l'application $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

$$f \mapsto \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$$

Donc en particulier $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = n \times p$.

Conséquence, avec des bases fixées, on peut associer à toute matrice, une unique application linéaire.

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **application linéaire canoniquement associée à A** , l'application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est A .

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminons l'application linéaire canoniquement associée à A que l'on notera f .

3) Opérations sur les matrices et les applications linéaires

Les opérations sur les matrices sont compatibles avec les opérations sur les applications linéaires :

Propriété.

- Si f et g sont dans $\mathcal{L}(E, F)$, et leurs matrices dans les mêmes bases sont A et B , alors la matrice de $f + g$ est $A + B$ et la matrice de λf est λA . (*linéarité de l'application φ*)
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, avec $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des bases respectives de E , F et G . Alors $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g) \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$. *attention à l'ordre des bases !*

Justification du deuxième • : Soit $x \in E$, on note $y = f(x)$ et $z = g(y)$ soit $z = g \circ f(x)$.

X (respectivement Y , Z) est la matrice colonne des coordonnées de x (respectivement y , z) dans la base $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$).

On note $A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$ et $B = \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g)$.

Conséquence : la matrice d'un isomorphisme est inversible et son inverse est la matrice de l'endomorphisme réciproque.

En effet, supposons que u soit un isomorphisme, on note u^{-1} son isomorphisme réciproque.

Propriété de caractérisation des isomorphismes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note M sa matrice dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

u est un isomorphisme si et seulement si M est inversible.

Et alors, $\text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u^{-1}) = (\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u))^{-1}$.

II. Changement de base

1) Matrice de passage

Définition.

On dispose de deux bases de E :

$\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ (dénommée « ancienne base »)

et $\mathcal{E}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ (que l'on appellera « nouvelle base »).

Les vecteurs de $\mathcal{E}'$ se décomposent dans la base $\mathcal{E}$: $u'_1 = \sum_{k=1}^p a_{k,1} u_k$.

On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$ la matrice $(a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$.

Autrement dit il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la nouvelle base, décomposés selon l'ancienne base.

$$P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow u_1 \\ \rightarrow u_2 \\ \vdots \\ \rightarrow u_p \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow u'_1 \\ \uparrow u'_2 \\ \dots \\ \uparrow u'_p \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Remarque : cette matrice est en fait $\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{Id}_E)$, elle est donc inversible, et son inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}'$ vers la base $\mathcal{E}$.

Exemple : dans $\mathbb{R}_2[X]$ on note $\mathcal{E}$ la base canonique $(1, X, X^2)$ et $\mathcal{E}'$ la base $(1, X - 1, X^2 - 2X + 2)$.

La matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$ est $P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

2) Changement de coordonnées

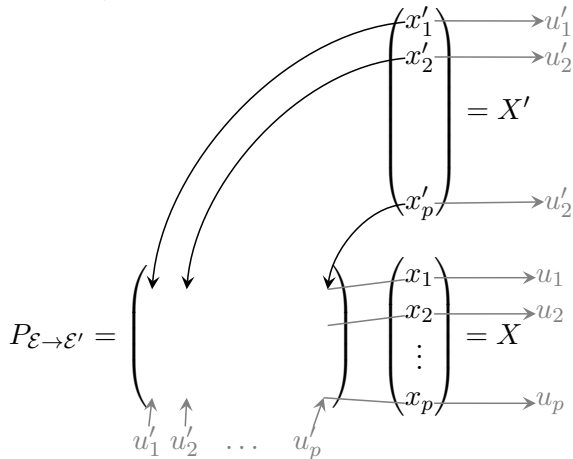
Propriété.

Soit x un vecteur de E , on note X (respectivement X') la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{E}'$).

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{E}'$.

Alors $X = PX'$ ou $X' = P^{-1}X$.

En effet,



$$\begin{aligned} \text{En fait, } x &= \sum_{k=1}^p x'_k u'_k \\ &= \sum_{k=1}^p x'_k \left(\sum_{i=1}^p a_{i,k} u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p x'_k a_{i,k} u_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^p x'_k a_{i,k} \right) u_i \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x_i = \sum_{k=1}^p a_{i,k} x'_k.$$

Suite de l'exemple : on donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on cherche les coordonnées du polynôme $Q = X^2 - X + 3$

dans la base $\mathcal{E}'$.

On note U la matrice des coordonnées de Q dans la base canonique, et U' la matrice des coordonnées de Q dans la base $\mathcal{E}'$.

3) Changement de bases pour la matrice d'une application linéaire

Données : $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

E est de dimension p , deux bases : $\mathcal{E} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ et $\mathcal{E}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$

P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$

F est de dimension n , deux bases : $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ et $\mathcal{F}' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$

Q est la matrice de passage de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}'$.

$A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$ et $A' = \text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(f)$.

Lien entre A et A' : $A' = Q^{-1}AP$.

Justification : soit $x \in E$: X la matrice de ses coordonnées dans $\mathcal{E}$, X' dans $\mathcal{E}'$.

On note $y = f(x)$ et Y la matrice des coordonnées de y dans $\mathcal{F}$, et Y' dans $\mathcal{F}'$.



Cas particulier d'un endomorphisme : $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E et toujours P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$.

On note $A = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f)$ ($\mathcal{E}$ est la base de départ et d'arrivée), et $A' = \text{mat}_{\mathcal{E}'}(f)$.

Alors $A' = P^{-1}AP$.

Exemple : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f((x, y, z)) = (2x + 2y + z; x + 3y + z; x + 2y + 2z)$.

a) Déterminer A , matrice de f dans la base canonique.

b) On donne $\mathcal{E}'$ la base formée de $u_1 = (2, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

Déterminer P la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{E}'$. On donne $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer A' , matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$.



Définition.

Deux matrices carrées A et A' sont dites **semblables** si il existe une matrice P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.

III. Bilan sur le rang

1) Les différentes notions de rang

Nous avons vu plusieurs notions de rang selon le contexte, mais elles se ramènent toutes à une matrice.

Le **rang d'une famille de vecteurs** est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Le **rang d'une application linéaire** est la dimension de son image :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) \text{ autrement dit } \text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

(avec $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E)

Le **rang d'une matrice** est le rang de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice.

C'est donc aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de sa matrice.

Ainsi, le **rang d'une famille de vecteurs** est aussi le rang de la matrice de ses vecteurs en colonnes.

Et le **rang d'une application linéaire** est aussi le rang de sa matrice.

Les deux caractéristiques précédentes sont valables dans n'importe quelles bases : voir propriété ci-dessous.

Propriété.

Le rang d'une matrice ne change pas lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.
En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Le **rang d'une matrice** est le nombre de pivots d'une matrice échelonnée équivalente.

Par exemple : on détermine le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & -15 \end{pmatrix}$

On peut montrer que $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée qui a 2 pivots.

Donc A est de rang 2 (donc n'est pas inversible).

Propriété.

Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si son rang est n .

Le **rang d'un système** est le nombre de pivots (visible lorsque le système est échelonné).

C'est aussi le rang de la matrice associée au système.

Remarque : le rang d'une matrice est aussi le rang de ses vecteurs lignes.

2) Théorème du rang adapté aux matrices

Définition.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **noyau** de A l'ensemble des antécédents de 0_n par $X \mapsto AX$.

Le noyau est une partie de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et est noté $\text{Ker}(A)$: $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_n\}$.

Définition.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **image** de A l'ensemble des images de l'application $X \mapsto AX$.

L'image est une partie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et est notée $\text{Im}(A)$:

$$\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\} \quad \text{ou} \quad \text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

Remarque : l'image d'une application linéaire est générée par les images des vecteurs d'une base.

Or les colonnes de A correspondent aux images des vecteurs de la base canonique.

Donc, en notant $A_1, A_2 \dots A_p$ ces colonnes, on obtient $\text{Im}(A) = \text{Vect}(A_1, A_2, \dots, A_p)$.

Exemple : déterminer une base de l'image de $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Théorème du rang (version matricielle).

nombre de colonnes de $A = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A)$

Explication : on applique le théorème du rang à l'application linéaire canoniquement associée à A .

Trouver des équations du noyau et de l'image d'une matrice :

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -7 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.