Applications linéaires.
A - Généralités

★ Exercice 1. Démonstration du théorème du rang.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie n. On note $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

1. Justifier que l'on peut trouver des vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une base de E.

2. Montrer que $f(e_{p+1}), f(e_{p+2}) \dots f(e_n)$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Montrer que la famille $\Big(f(e_{p+1}), f(e_{p+2}) \dots f(e_n)\Big)$ est libre.

4. Conclure.

Exercice 2.

1. On définit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x-2y, 11x+7y-z) \end{array}$ Calculer $f(2,-1,3)$ et $f(\pi+1, 3, \pi)$.

2. On définit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP'+P \end{array}$ Calculer $f(5X^2-2X+3)$ et $f\Big((3X+2)^2\Big)$.

Exercice 3.

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z, x, x-2y) \end{array}$

2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z, 1+y+z) \end{array}$

3. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$

4. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0, x^2, z-y) \end{array}$

5. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP+P(1) \end{array}$

6. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \times P \end{array}$

7. $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2\mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM-MA \end{array}$ avec A une matrice fixée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

8. $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & y''+3y'-2y \end{array}$

Exercice 4.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$.

Montrer que f est un automorphisme et déterminer sa réciproque.

Exercice 5.

On note $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P(2)X+P(5) \end{array} \right.$

Montrer que f est linéaire montrer que f est surjective et déterminer $\mathrm{Ker}(f)$: f est-elle injective ?

Exercice 6.

On admet que les applications suivantes sont linéaires.

Dans chacune des cas suivants, déterminer une base du noyau et de l'image de l'application et préciser si elle est injective, surjective, bijective.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f_1(x,y) = (4x-3y, 5x+4y, x-y)$

2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $f_2(x,y,z) = (6x-4y+z, 9x-6y)$

3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f_3(x,y) = (x,x,x)$

4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f_4(x,y) = 4x-7y$.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP'-2P \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire le rang de f.

3. Donner alors la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base.