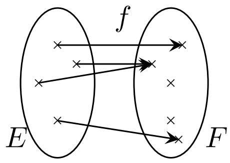
Applications linéaires
A - Généralités

Rappels : f est une application de E dans F :



⋆ soit $A \subset \dots$, l'image de A par f est ....

⋆ soit $B \subset \dots$, l'image réciproque de B par f est ....

⋆ f est injective signifie : ....

pour montrer que f est injective, on peut procéder ainsi :

....

⋆ f est surjective signifie : ....

pour montrer que f est surjective, on peut procéder ainsi :

....

⋆ f est bijective signifie ....

ou encore ....

I. Généralités

1) Définitions

Définition.
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F.
On dit que f est une ***application linéaire*** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
⋆ $\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$;
⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$. (conséquence : $f(0) = 0$)
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Une application linéaire est aussi appelée ***morphisme d'espaces vectoriels***.

Propriété.
Soit f une application de E dans F.
f est une application linéaire si et seulement si $\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.

Exemple : f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f\big((1,0)\big) = -2$ et $f\big((0,1)\big) = 4$.

Alors $f\big((2,3)\big) = f\big(2(1,0) + 3(0,1)\big) =$ ....

$f\big((0,-5)\big) =$ ....

$f\big((x,y)\big) =$ ....

Vocabulaire :

- une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est une ***forme linéaire*** ;
- une application linéaire de E dans E est un ***endomorphisme de*** E,
  on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ;
- une application linéaire bijective de E dans F est un ***isomorphisme***,
  si une telle application existe, on dit que E et F sont ***isomorphes*** ;
- une application linéaire bijective de E dans E est un ***automorphisme de*** E,
  on appelle ***groupe linéaire*** et on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

2) Exemples classiques

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array} \right.$ est ....

....

....

- $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+2y \end{array} \right.$ est une forme linéaire :

....

....

....

- $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\dots,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{\dots,\dots}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ est ....

....

....

Remarque : on peut identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Ainsi h serait une application définie sur ... à valeurs dans ....

- $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$ est ....

....

....

- $l : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy+5y \end{array} \right.$ ....

....

....

Méthode : pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire :
« Soient u et v dans E, et λ dans $\mathbb{K}$:
$f(u+\lambda v) = \ldots = \ldots\ldots = f(u) + \lambda f(v)$ »

Définition.

L'***application identité de*** E notée Id_E est définie par $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$

L'application identité est un automorphisme de E.

En effet,

3) Noyau et image

Propriété.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
- L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle ***image de*** f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'espace-vectoriel $f(E)$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \,|\, x \in E\}$.
- On appelle ***noyau de*** f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'espace vectoriel $f^{-1}(\{0\})$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) = 0\}$.

Exemples :

- avec $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array} \right.$

  $\mathrm{Ker}(f) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

  $\mathrm{Im}(f) = \{\text{multiples de } X\}$, en effet

- avec $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + 2y \end{array} \right.$

  $\mathrm{Ker}(g) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

  $\mathrm{Im}(g) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  en effet

Méthode : on peut utiliser le noyau ou l'image pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel. Par exemple, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 2y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car c'est $\mathrm{Ker}(g)$.

Propriété : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.
f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

Démonstration :

Exemple : montrons que l'application linéaire $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est surjective et non injective.

4) Opérations sur les applications linéaires

Propriété.

- Une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire : si f et g sont dans $\mathcal{L}(E,F)$ et λ et μ dans $\mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F)$. (autrement dit, $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$. Si, de plus, f et g sont des isomorphismes, alors $g \circ f$ aussi.
- Si f est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$, alors sa réciproque f^{-1} est dans $\mathcal{L}(F,E)$ et est un isomorphisme. De plus, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

II. Applications linéaires et dimension finie

Propriété.

L'image par l'application linéaire f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
En particulier on déduit que si E est de dimension finie, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie aussi.

Exemple : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

$(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, ...

....

....

....

Dans toute la suite de cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Images d'une base

Théorème.

Une application linéaire est déterminée de manière unique par les images des vecteurs d'une base.
Autrement dit, si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E, et si $(v_1, v_2, \dots v_n)$ sont des vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], f(u_k) = v_k$.

Exemples :

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}[X])$.
  On sait que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = 3X^{k+1}$.

$$f(8X^2 - 7X + 4) = \dots$$
$$= \dots$$
$$= \dots$$

$$f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \dots$$
$$= \dots$$

- On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
  Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e_1) = (1, 3, 1)$, $f(e_2) = (0, 0, 0)$ et $f(e_3) = (-2, 1, 0)$.

  Alors pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Propriété.

On note $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :
- f est injective si et seulement si $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre de F ;
- f est surjective si et seulement si $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille génératrice de F ;
- f est bijective si et seulement si $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une base de F ;

Démonstration : (facultative)

- injectivité :
  - ⋆ « $\Rightarrow$ » supposons que f soit injective, montrons que $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre de F.
    Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des scalaires tels que $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_p f(u_p)) = \mathbf{0}_F$.
    Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.
      Par linéarité de f, $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_p f(u_p) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p)$.
      Donc $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p) = \mathbf{0}_F$ c'est-à-dire $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p \in \mathrm{Ker}(f)$.
      Or f est injective, donc $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$, donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p = \mathbf{0}_E$.
      Or $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E donc une famille libre.
    Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.
    Donc la famille $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est libre. □
  - ⋆ « $\Leftarrow$ » supposons que $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ soit une famille libre de F, montrons que f est injective.
    Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, montrons que $x = \mathbf{0}_E$.
      $x \in E$ donc x se décompose dans la base $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, on note $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$.
      Alors $f(x) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_p f(u_p)$ (linéarité)
      et $f(x) = \mathbf{0}_F$ (x est dans le noyau).
      Donc $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_p f(u_p) = \mathbf{0}_F$.
      La famille $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ étant libre, cela entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$, donc $x = \mathbf{0}_E$.

    Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$, donc f est injective. □
- surjectivité : $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E donc $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, autrement dit, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$.
  Ainsi, $$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \mathrm{Im}(f) = F \\ &\iff \mathrm{Vect}\,(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)) = F \\ &\iff (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)) \text{ génératrice de } F \end{aligned}$$ □
- bijectivité : $$\begin{aligned} f \text{ bijective} &\iff f \text{ surjective et injective} \\ &\iff (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)) \text{ génératrice de } F \text{ et libre} \\ &\iff (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)) \text{ base de } F \end{aligned}$$

Exemple : on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On définit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\phi(e_1) = (3, -2)$, $\phi(e_2) = (0, 6)$ et $\phi(e_3) = (-3, 1)$.
ϕ est-elle surjective ? injective ?

2) Isomorphismes

On se rappelle que dans un espace de dimension n, toute famille libre de n vecteurs est une base, et toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
On peut donc déduire de la propriété précédente que :

Propriété.
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\dim(E) = \dim(F)$, alors :
$$f \text{ est un isomorphisme} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ injective.}$$

Méthode : pour montrer qu'une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, il suffit de montrer
- SOIT : f est injective (avec $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$) ET $\dim(E) = \dim(F)$;
- SOIT : f est surjective ET $\dim(E) = \dim(F)$.

Exemple : Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts.
On définit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)) \end{cases}$.
Montrons que ϕ est un isomorphisme.

Théorème.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Alors E et F sont isomorphes (existe un isomorphisme de E dans F) si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Exemples : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$ sont isomorphes, tout comme $\mathbb{R}_7[X]$ et $\mathbb{R}^8$, ou encore $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ...

3) Rang d'une application linéaire et ses propriétés

Définition.
Le ***rang*** d'une application linéaire est la dimension de son image :
si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Propriété.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E.
Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$. (*rang d'une famille de vecteurs*)

En effet, ...

....

....

Théorème du rang.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration : voir exercice 1.

Exemple d'utilisation : déterminer une base du noyau et de l'image d'une application linéaire.
On note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (x + z, y - 2x, -x + y + z)$, on va déterminer une base de son image et de son noyau.

Méthode : pourtrouver une base de l'image de f, on trouve une famille génératrice à partir des images des vecteurs d'une base de E, et on en extrait le bon nombre de vecteurs, donné par le théorème du rang.

Propriété.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.
- Si f est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.
- Si g est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

III. Équations linéaires

Une équation d'inconnue $x \in E$ est dite linéaire si elle est de la forme $f(x) = b$ avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.
Exemples :
- $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ d'inconnue y, fonction de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

  Alors $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & u'' + 2u' - 3u \end{array}$ f est linéaire, et l'équation devient $f(y) = e^{2t}$.

- $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 7z & = & 6 \\ 11x - y + z & = & -5 \end{array} \right.$

  Ce système est une équation de la forme $f(u) = b$ d'inconnue $u = (x, y, z)$ avec $b = (6, -5)$ et
  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (3x + 7z, 11x - y + 7) \end{array}$

Structure de l'ensemble des solutions : avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et l'équation $f(x) = b$.
⋆ si $b = 0$, l'ensemble solution est $f^{-1}(\{0\})$ c'est-à-dire $\text{Ker}(f)$;
⋆ si $b \neq 0$, et si $b \in \text{Im}(f)$, alors b a un antécédent x_0 par f,
alors x est solution $\iff f(x) = b$

$$\iff f(x) = f(x_0)$$
$$\iff f(x - x_0) = 0$$
$$\iff x - x_0 \in \text{Ker}(f)$$

Ainsi, toute solution s'écrit $x = x_0 + u$ avec x_0 solution particulière et $u \in \text{Ker}(f)$ (solution de l'équation homogène associée).
⋆ si $b \notin \text{Im}(f)$, alors l'équation n'a pas de solution.

Suite de l'exemple : résolution de $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$.

- $\star$ équation homogène : l'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$
  $\Delta = 4 + 12 = 16$ donc $r_1 = -3$ et $r_2 = 1$.
  On note $y_1 : t \mapsto e^{-3t}$ et $y_2 : t \mapsto e^t$.
  Alors $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{\lambda y_1 + \mu y_2 \, , \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
  traduction algébrique : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(y_1, y_2)$, car $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$

- $\star$ solution particulière : recherche sous la forme $y(t) = Ce^{2t}$
  $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = (4C + 4C - 3C)e^{2t} = 5Ce^{2t}$.
  Donc avec $C = \frac{1}{5}$, on définit $y_0(t) = \frac{1}{5}e^{2t}$, y_0 est une solution particulière de l'équation.
  traduction algébrique : $f(y_0) = b$.

- $\star$ $\mathcal{S} = \{y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2 \, , \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
  traduction algébrique : y_0 solution particulière, et $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

Résolution du système $\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 7z & = & 6 \\ 11x - y + z & = & -5 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 7z & = & 6 \\ 11x - y + z & = & -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + \frac{7}{3}z & = & 2 \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ 11x - y + z & = & -5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + \frac{7}{3}z & = & 2 \\ -y - \frac{74}{3}z & = & -27 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 11L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 - \frac{7}{3}z \\ y & = & 27 - \frac{74}{3}z \end{array}\right.$$

$\mathcal{S} = \{(2 - \frac{7}{3}z, 27 - \frac{74}{3}z, z) \, , \, z \in \mathbb{R}\} = \Big\{(2, 27, 0) + z(-\frac{7}{3}, -\frac{74}{3}, 1) \, , \, z \in \mathbb{R}\Big\}$.
traduction algébrique : $\mathcal{S} = \{u_0 + \lambda u_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ avec u_0 une solution particulière et $\lambda u_1 \in \mathrm{Ker}(f)$