Applications linéaires.
A - Généralités

☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

★ Exercice 1. Démonstration du théorème du rang.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie n. On note $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

1. Justifier que l'on peut trouver des vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une base de E.

2. Montrer que $f(e_{p+1}), f(e_{p+2}) \dots f(e_n)$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Montrer que la famille $\Big(f(e_{p+1}), f(e_{p+2}) \dots f(e_n)\Big)$ est libre.

4. Conclure.

Exercice 2.

1. On définit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x-2y, 11x+7y-z) \end{array}$ calculer $f(2,-1,3)$ et $f(\pi+1,3,\pi)$.

2. On définit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP'+P \end{array}$ calculer $f(5X^2-2X+3)$ et $f\Big((3X+2)^2\Big)$.

Exercice 3.

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

☞ **1.** $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z, x, x-2y) \end{array}$

2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, z, 1+y+z) \end{array}$

☞ **3.** $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$

4. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0, x^2, z-y) \end{array}$

☞ **5.** $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP+P(1) \end{array}$

6. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \times P \end{array}$

7. $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2\mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM-MA \end{array}$ avec A une matrice fixée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

8. $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & y''+3y'-2y \end{array}$

Exercice 4.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$.
Montrer que f est un automorphisme et déterminer sa réciproque.

☞ Exercice 5.

On note $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P(2)X+P(5) \end{array} \right.$
Montrer que f est linéaire montrer que f est surjective et déterminer $\mathrm{Ker}(f)$: f est-elle injective ?

Exercice 6.

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0 \text{ et } z=0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall u_F \in F,\ \Phi(u_F) = -u_F$ et $\forall u_G \in G,\ \Phi(u_G) = u_G$.
Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a $\Phi((x,y,z)) = (y+z, x+z, -z)$.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' - 2P \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire le rang de f.

3. Donner alors la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base.

Exercice 8.

On admet que les applications suivantes sont linéaires.
Pour chacune, déterminer son noyau et son image, et si elle est injective, surjective, bijective.

☞ **1.** $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f_1(x,y) = (4x-3y, 5x+4y, x-y)$

☞ **2.** $f_2 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ avec $f_2(P) = P(X-1) - P$

3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (6x-4y+z, 9x-6y)$

☞ **4.** $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible

☞ **5.** $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f_5(x,y) = (x,x,x)$

6. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f' - 3f \end{array}$

☞ **7.** $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(0) & P(1) \\ P'(0) & P'(1) \end{pmatrix} \end{array}$

☞ **8.** $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$

9. $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f_8(x,y) = 4x - 7y$.