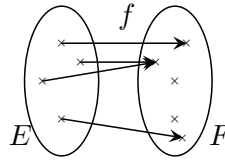


# APPLICATIONS LINÉAIRES

## A - Généralités

**Rappels :**  $f$  est une application de  $E$  dans  $F$  :



- ★ soit  $A \subset \dots$ , l'image de  $A$  par  $f$  est .....
- ★ soit  $B \subset \dots$ , l'image réciproque de  $B$  par  $f$  est .....
- ★  $f$  est injective signifie : .....  
pour montrer que  $f$  est injective, on peut procéder ainsi :  
.....
- ★  $f$  est surjective signifie : .....  
pour montrer que  $f$  est surjective, on peut procéder ainsi :  
.....
- ★  $f$  est bijective signifie .....  
ou encore .....

### I. Généralités

#### 1) Définitions

##### Définition.

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .  
On dit que  $f$  est une **application linéaire** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- ★  $\forall (u, v) \in E^2, f(u + v) = f(u) + f(v)$  ;
- ★  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\lambda u) = \lambda f(u)$ . (conséquence :  $f(0) = 0$ )

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .  
Une application linéaire est aussi appelée **morphisme d'espaces vectoriels**.

##### Propriété.

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .  
 $f$  est une application linéaire si et seulement si  $\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ .

**Exemple :**  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f((1, 0)) = -2$  et  $f((0, 1)) = 4$ .

Alors  $f((2, 3)) = f(2(1, 0) + 3(0, 1)) = \dots$

$f((0, -5)) = \dots$

$f((x, y)) = \dots$

##### **Vocabulaire :**

- une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  est une **forme linéaire** ;
- une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est un **endomorphisme de  $E$** , on note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  ;
- une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$  est un **isomorphisme**, si une telle application existe, on dit que  $E$  et  $F$  sont **isomorphes** ;
- une application linéaire bijective de  $E$  dans  $E$  est un **automorphisme de  $E$** , on appelle **groupe linéaire** et on note  $\text{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

### 2) Exemples classiques

•  $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto XP' \end{cases}$  est .....

•  $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x + 2y \end{cases}$  est une forme linéaire :

•  $h : \begin{cases} \mathcal{M}_{\dots,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$  est .....

**Remarque :** on peut identifier  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .  
Ainsi  $h$  serait une application définie sur ... à valeurs dans ....

•  $k : \begin{cases} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_a^b f(x) dx \end{cases}$  est .....

•  $\ell : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto xy + 5y \end{cases}$  .....



**Méthode :** pour montrer qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire :

« Soient  $u$  et  $v$  dans  $E$ , et  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  :

$f(u + \lambda v) = \dots = \dots = f(u) + \lambda f(v)$  ou  $f(u + \lambda v) = \dots = \dots \leftarrow$  pareil  
 $f(u) + \lambda f(v) = \dots = \dots \leftarrow$

**Définition.**

L'application identité de  $E$  notée  $\text{Id}_E$  est définie par  $\text{Id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto x \end{cases}$

L'application identité est un automorphisme de  $E$ .

En effet,

### 3) Noyau et image

**Propriété.**

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .
- L'image par  $f$  d'un sous-espace vectoriel de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
  - L'image réciproque par  $f$  d'un sous-espace vectoriel de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Définition.**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- On appelle **image de  $f$**  et on note  $\text{Im}(f)$  l'espace-vectoriel  $f(E)$ , c'est-à-dire  $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$ .
- On appelle **noyau de  $f$**  et on note  $\text{Ker}(f)$  l'espace vectoriel  $f^{-1}(\{0\})$ , c'est-à-dire  $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ .

**Exemples :**

- avec  $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto XP' \end{cases}$

$\text{Ker}(f) = \dots\dots\dots$

$\text{Im}(f) = \{\text{multiples de } X\}$ , en effet

- avec  $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x + 2y \end{cases}$

$\text{Ker}(g) = \dots\dots\dots$

$\text{Im}(g) = \dots\dots\dots$

en effet



**Méthode :** on peut utiliser le noyau ou l'image pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel. Par exemple,  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  car c'est  $\text{Ker}(g)$ .



**Propriété : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$ .
- $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .

**Démonstration :**

**Exemple :** montrons que l'application linéaire  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  est surjective et non injective.  

$$P \mapsto P'$$

#### 4) Opérations sur les applications linéaires

**Propriété.**

- Une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire : si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{K}$ , alors  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$ . (autrement dit,  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel )
- Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .  
Si, de plus,  $f$  et  $g$  sont des isomorphismes, alors  $g \circ f$  aussi.
- Si  $f$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(E, F)$ , alors sa réciproque  $f^{-1}$  est dans  $\mathcal{L}(F, E)$  et est un isomorphisme.  
De plus,  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$  et  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ .

## II. Applications linéaires et dimension finie

Dans toute la suite de cette partie,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

**Propriété.**

Si  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est une famille génératrice de  $E$ , alors  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  est génératrice de  $\text{Im}(f)$ .  
 En particulier on déduit que si  $E$  est de dimension finie,  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie aussi.

**Exemple :**  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$   

$$P \mapsto P'$$

$(1, X, X^2, X^3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ , .....  
 .....  
 .....  
 .....

#### 1) Images d'une base

**Théorème.**

Une application linéaire est déterminée de manière unique par les images des vecteurs d'une base.  
 Autrement dit, si  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ , et si  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  sont des vecteurs de  $F$ , alors il existe une unique application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(u_k) = v_k$ .

**Exemples :**

- Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}[X])$ .  
 On sait que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(X^k) = 3X^{k+1}$ .

$$\begin{aligned}
 f(8X^2 - 7X + 4) &= \dots \\
 &= \dots \\
 &= \dots
 \end{aligned}
 \qquad
 \qquad
 \qquad
 \begin{aligned}
 f\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) &= \dots \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

- On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  
Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $f(e_1) = (1, 3, 1)$ ,  $f(e_2) = (0, 0, 0)$  et  $f(e_3) = (-2, 1, 0)$ .  
Alors pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $f((x, y, z)) = \dots\dots\dots$

**Propriété.**



On note  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une base de  $E$ .  
Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors :

- $f$  est injective si et seulement si  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  est une famille libre de  $F$  ;
- $f$  est surjective si et seulement si  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  est une famille génératrice de  $F$  ;
- $f$  est bijective si et seulement si  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  est une base de  $F$  ;

**Démonstration :** (facultative)

- injectivité :
  - ★ «  $\Rightarrow$  » supposons que  $f$  soit injective, montrons que  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  est une famille libre de  $F$ .  
Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  des scalaires tels que  $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_p f(u_p) = \mathbf{0}_F$ .  
Montrons que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ .  
Par linéarité de  $f$ ,  $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_p f(u_p) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p)$ .  
Donc  $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p) = \mathbf{0}_F$  c'est-à-dire  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p \in \text{Ker}(f)$ .  
Or  $f$  est injective, donc  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$ , donc  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = \mathbf{0}_E$ .  
Or  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une base de  $E$  donc une famille libre.  
Donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ .  
Donc la famille  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  est libre. □
  - ★ «  $\Leftarrow$  » supposons que  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  soit une famille libre de  $F$ , montrons que  $f$  est injective.  
Soit  $x \in \text{Ker}(f)$ , montrons que  $x = \mathbf{0}_E$ .  
 $x \in E$  donc  $x$  se décompose dans la base  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ , on note  $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$ .  
Alors  $f(x) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_p f(u_p)$  (linéarité)  
et  $f(x) = \mathbf{0}_F$  ( $x$  est dans le noyau).  
Donc  $\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_p f(u_p) = \mathbf{0}_F$ .  
La famille  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  étant libre, cela entraîne  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ , donc  $x = \mathbf{0}_E$ .  
Donc  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$ , donc  $f$  est injective. □
- surjectivité :  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une base de  $E$  donc  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ , autrement dit,  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$ .  
Ainsi,  $f$  surjective  $\iff \text{Im}(f) = F$   
 $\iff \text{Vect}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p)) = F$   
 $\iff (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  génératrice de  $F$  □
- bijectivité :  $f$  bijective  $\iff f$  surjective et injective  
 $\iff (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  génératrice de  $F$  et libre  
 $\iff (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$  base de  $F$  □

**Exemple :** on note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  
On définit  $\phi$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\phi(e_1) = (3, -2)$ ,  $\phi(e_2) = (0, 6)$  et  $\phi(e_3) = (-3, 1)$ .  
 $\phi$  est-elle surjective ? injective ?

## 2) Isomorphismes

On se rappelle que dans un espace de dimension  $n$ , toute famille libre de  $n$  vecteurs est une base, et toute famille génératrice de  $n$  vecteurs est une base.

On peut donc déduire de la propriété précédente que :

### Propriété.

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors :

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ injective.}$$



**Méthode :** pour montrer qu'une application linéaire de  $\mathcal{L}(E, F)$  est un isomorphisme, il suffit de montrer

- SOIT :  $f$  est injective (avec  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$ ) ET  $\dim(E) = \dim(F)$  ;
- SOIT :  $f$  est surjective ET  $\dim(E) = \dim(F)$ .

**Exemple :** Soient  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  deux à deux distincts.

On définit  $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)) \end{cases}$

Montrons que  $\phi$  est un isomorphisme.

### Théorème.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes (existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ ) si et seulement si  $\dim(E) = \dim(F)$ .

**Exemples :**  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^4$  sont isomorphes, tout comme  $\mathbb{R}_7[X]$  et  $\mathbb{R}^8$ , ou encore  $\mathbb{R}_3[X]$  et  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \dots$

Pour construire l'isomorphisme, on associe aux vecteurs de la base canonique de départ, les vecteurs de la base canonique d'arrivée.

## 3) Rang d'une application linéaire et ses propriétés

### Définition.

Le **rang** d'une application linéaire est la dimension de son image :

si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ .

### Propriété.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une base de  $E$ .

Alors  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$ . (rang d'une famille de vecteurs)

En effet, .....

.....

.....

### Théorème du rang.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$ .

**Démonstration :** voir exercice 1.





**Exemple d'utilisation :** déterminer une base du noyau et de l'image d'une application linéaire.

On note  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avec  $f(x, y, z) = (x + z, y - 2x, -x + y + z)$ , on va déterminer une base de son image et de son noyau.



**Méthode :** pour trouver une base de l'image de  $f$ , on trouve une famille génératrice à partir des images des vecteurs d'une base de  $E$ , et on en extrait le bon nombre de vecteurs, donné par le théorème du rang.

**Propriété.**

- Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$ .
- Si  $f$  est un isomorphisme, alors  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$ .
- Si  $g$  est un isomorphisme, alors  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$ .

### III. Équations linéaires

Une équation d'inconnue  $x \in E$  est dite linéaire si elle est de la forme  $f(x) = b$  avec  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $b \in F$ .

**Exemples :**

- On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

On s'intéresse à l'équation différentielle  $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$  d'inconnue  $y$  dans  $E$ .

Alors on définit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$   $f$  est linéaire, et l'équation devient  $f(y) = e^{2t}$ .  
 $u \mapsto u'' + 2u' - 3u$

- $$\begin{cases} 3x + 7z = 6 \\ 11x - y + z = -5 \end{cases}$$

Ce système est une équation de la forme  $f(u) = b$  d'inconnue  $u = (x, y, z)$  avec  $b = (6, -5)$  et

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (3x + 7z, 11x - y + z)$$

**Structure de l'ensemble des solutions :** avec  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et l'équation  $f(x) = b$ .

- \* si  $b = 0$ , l'ensemble solution est  $f^{-1}(\{0\})$  c'est-à-dire  $\text{Ker}(f)$  ;
- \* si  $b \notin \text{Im}(f)$ , alors l'équation n'a pas de solution ;
- \* si  $b \neq 0$ , et si  $b \in \text{Im}(f)$ , alors  $b$  a un antécédent  $x_0$  par  $f$ ,  
alors  $x$  est solution  $\iff f(x) = b$

$$\iff f(x) = f(x_0)$$

$$\iff f(x - x_0) = 0$$

$$\iff x - x_0 \in \text{Ker}(f)$$

Ainsi, toute solution s'écrit  $x = x_0 + u$  avec  $x_0$  solution particulière et  $u \in \text{Ker}(f)$  (solution de l'équation homogène associée).

**Suite des exemples :**

- résolution de  $y'' + 2y' - 3y = e^{2t}$ .

★ équation homogène : l'équation caractéristique est  $r^2 + 2r - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$  donc  $r_1 = -3$  et  $r_2 = 1$ .

On note  $y_1 : t \mapsto e^{-3t}$  et  $y_2 : t \mapsto e^t$ .

Alors  $\mathcal{S}_H = \{\lambda y_1 + \mu y_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

*traduction algébrique* :  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(y_1, y_2)$ , car  $\text{Ker}(f) = \mathcal{S}_H$

★ solution particulière : recherche sous la forme  $y(t) = Ce^{2t}$

$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = (4C + 4C - 3C)e^{2t} = 5Ce^{2t}$ .

Donc avec  $C = \frac{1}{5}$ , on définit  $y_0(t) = \frac{1}{5}e^{2t}$  :  $y_0$  est une solution particulière de l'équation.

*traduction algébrique* :  $f(y_0) = b$ .

★  $\mathcal{S} = \{y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

*traduction algébrique* :  $y_0$  solution particulière, et  $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \text{Ker}(f)$ .

- résolution du système 
$$\begin{cases} 3x + 7z = 6 \\ 11x - y + z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 7z = 6 \\ 11x - y + z = -5 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + \frac{7}{3}z = 2 \\ 11x - y + z = -5 \end{cases} & L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{7}{3}z = 2 \\ -y - \frac{74}{3}z = -27 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - 11L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = 2 - \frac{7}{3}z \\ y = 27 - \frac{74}{3}z \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \{(2 - \frac{7}{3}z, 27 - \frac{74}{3}z, z), z \in \mathbb{R}\} = \{(2, 27, 0) + z(-\frac{7}{3}, -\frac{74}{3}, 1), z \in \mathbb{R}\}$ .

*traduction algébrique* : on note  $u_0 = (2, 27, 0)$  et  $u_1 = (-\frac{7}{3}, -\frac{74}{3}, 1)$ ,

alors  $\mathcal{S} = \{u_0 + \lambda u_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$  avec  $u_0$  une solution particulière et  $\lambda u_1 \in \text{Ker}(f)$ .