Espaces vectoriels

C - Intersection et somme de sous-espaces vectoriels.

I. Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + z = 0\}$

Propriété.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Alors $\bigcap_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel de E.

Attention : le plus souvent, $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel !

II. Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

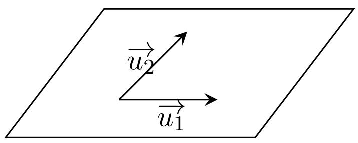
1) Somme de sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E.
On note $F + G$ l'ensemble des vecteurs de la forme $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.

Ainsi, $F + G = \{u + v\,,\ u \in F \text{ et } v \in G\}$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux droites vectorielles F et G engendrées par des vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.



Remarque : $\boxed{\mathrm{Vect}\,(u,v) + \mathrm{Vect}\,(w,z) = \mathrm{Vect}\,(u,v,w,z)}$

Propriété.

- $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F+G$ est le plus petit sous-espace de E qui contient $F \cup G$.

Preuve : voir l'exercice 1.

Traduction du second point : si un sous-espace vectoriel de E contient $F \cup G$, alors il contient aussi $F+G$.

2) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définitions.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels.
La somme $F+G$ est dite ***directe*** lorsque la décomposition $x = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ est unique.
On note alors $F \oplus G$.

Propriété.

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Démonstration :

Précision préliminaire : $F \cap G$ est un espace vectoriel, donc il contient au moins le vecteur nul, ainsi, montrer que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ revient à montrer que $F \cap G \subset \{\mathbf{0}\}$.

Méthode : pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on prend un vecteur dans l'intersection, et on montre que c'est nécessairement le vecteur nul.

Exemple : $F = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 0)$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y = 0\}$, montrons que F et G sont en somme directe.

3) Somme en dimension finie

Propriété : formule de Grassmann.

Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies.
Alors $F+G$ est de dimension finie et $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$.
En particulier, $\dim(F\oplus G)=\dim(F)+\dim(G)$.

Exemple (suite) : avec F et G de l'exemple précédent, on a déjà montré qu'ils sont en somme directe.

Propriété: base et somme directe.

- Si F et G sont en somme directe, avec $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F, et $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ une base de G, alors la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de $F\oplus G$.
- Si $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre, alors $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe : $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)\oplus\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)=\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemple (suite et fin) : toujours les mêmes F et G.

Donc d'après la propriété, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $F\oplus G$ (on dit parfois « obtenue par recollement »).

Or on a montré que $F\oplus G$ est égal à $\mathbb{R}^3$.
Donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On dit que cette base est ***adaptée à la décomposition en somme directe***.

III. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

1) Cas général

Définitions.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels.
Lorsque la somme $F+G$ est directe et que $F\oplus G=E$, on dit que F et G sont ***supplémentaires***.

Exemple 1 : on note $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Alors d'après le 2ème point de la propriété ci-dessus, le plan $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la droite dirigée par $\overrightarrow{k}$ sont en somme directe : $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)\oplus\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{k}\right)=\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
De plus $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)=\mathbb{R}^3$.
Donc le plan $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la droite engendrée par $\overrightarrow{k}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Ainsi, tout vecteur de l'espace peut être décomposé de manière unique en somme d'un vecteur du plan $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ avec un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{k}$.

Exemple 2 : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes, et soient F le sous-espace vectoriel de E formé des suites convergeant vers 0, et G celui des suites constantes.
On va montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Méthode pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :

1. montrer $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$: on prend un élément de l'intersection et on montre qu'il est nécessairement nul ;

2. montrer $E = F + G$: on prend un élément de E et on cherche à l'exprimer comme une somme d'un élément de F et un élément de G. (*on peut alors raisonner par analyse et synthèse*)

Attention : ne pas confondre supplémentaire (notion liée aux sous-espaces vectoriels) et complémentaires (notion liée aux ensembles).

2) Supplémentaires en dimension finie

Propriété.

E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$

(ii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

(iii) $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = z\}$.
Montrons que F et G sont supplémentaires.

Méthode pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires <u>en dimension finie</u> :

1. montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul ;

2. montrer que la somme de leurs dimensions est la dimension de l'espace.

Propriété.

E est un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F a un supplémentaire G dans E qui vérifie alors $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Démonstration : (facultative)

F est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie, donc F est de dimension finie.
Donc F a une base, on la note $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$.
La famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est donc libre.
Ainsi, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille de vecteurs $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ telle que $(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ soit une base de E.
On définit alors le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, \ldots, g_q)$.
Alors, d'après la propriété sur les bases et somme directe, F et G sont en somme directe,
et $F \oplus G = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) = E$.
Donc G est bien un supplémentaire de F.
Et $p + q = \dim(E)$, donc $q = \dim(E) - p$ soit $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$. □