Espaces vectoriels
C - Dimension finie

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition.
Un espace vectoriel E est de ***dimension finie*** si il existe dans E une famille génératrice finie.
Sinon, il est de dimension infinie.

Exemples :
- L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie : ....

....

- L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie : on raisonne par l'absurde.
  Supposons qu'il ait une famille génératrice finie P_1, P_2, $\dots P_n$.

....

....

....

....

I. Dimension finie et base

Théorème de la base extraite.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.
De toute famille génératrice, on peut extraire une sous-famille qui sera une base de E.
En particulier, cela montre que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Remarque : si l'un des vecteurs d'une famille est une combinaison linéaire des autres, alors on peut le retirer sans changer l'espace vectoriel engendré.
Par exemple si w est une combinaison linéaire de u et v, alors $\text{vect}(u, v, w) = \text{vect}(u, v)$.

Exemple : montrer que la famille $\overrightarrow{u} = (1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1)$ et $\overrightarrow{w} = (0, 1)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ et en extraire une base.

Théorème de la base incomplète.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.
Toute famille libre de E peut être complétée pour former une base de E.

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{u} = (1,0,1)$ et $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$. Nous allons montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre mais pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ et on va la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Propriété et définition.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul, alors toutes les bases de E ont même cardinal (nombre de vecteurs), et ce cardinal est appelé ***dimension*** de l'espace vectoriel E, noté $\dim(E)$.
Par convention, la dimension de l'espace vectoriel $\{\mathbf{0}\}$ est 0.

Exemples à retenir :

- Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1 :

  ....

- Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2 :

  ....

  ....

- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 :

  par définition : $\mathbb{C} = \{x+iy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\,(\ldots\ldots\ldots)$

Propriété : dimensions des espaces vectoriels usuels.

- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
  La base canonique est formée des vecteurs $(1,0,\ldots,0),\ (0,1,0\ldots,0),\ \ldots\ ,(0,0,\ldots,1)$.
- le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$.
  La base canonique est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times p$.

  La base canonique est $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ avec $E_{i,j}$ la matrice nulle partout sauf le coefficient de la ligne i et la colonne j qui vaut 1.

Propriété.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
De plus $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

Méthode : pour montrer que deux (sous-)espaces sont égaux, on peut montrer que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont même dimension.
Voir une application dans l'**exercice 2.**.

II. Dimension finie et familles

1) liée, génératrice, base

Propriété (lien entre nombre de vecteurs et libre/génératrice).

Soit E un espace vectoriel de dimension n :
- si $m > n$, alors toute famille de m vecteurs est liée ;
- si $p < n$, alors aucune famille de p vecteurs ne peut être génératrice ;
- toute famille libre de n vecteurs est une base ;
- toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Exemple : montrer que $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 3 + X$ et $P_3 = -X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Méthode : pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel E de dimension n, on a désormais 4 possibilités :
- ⋆ montrer que la famille est libre et génératrice de E ;
- ⋆ montrer que la famille est libre et qu'elle est formée de n vecteurs ;
- ⋆ montrer que la famille est génératrice de E et qu'elle est formée de n vecteurs ;
- ⋆ montrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille, ce qui nous donne en même temps les coordonnées.

2) rang d'une famille de vecteurs

Définition.

On appelle ***rang d'une famille de vecteurs*** la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.
Concrètement, si $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$, alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p))$.

Propriété.

Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs dans une base.

Exemple : dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $P_1 = 1 - X + X^2$, $P_2 = -1 + X + 3X^2$ et $P_3 = -1 + X + X^2$, et déterminons le rang de la famille (P_1, P_2, P_3).

Dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $(1,\ X,\ X^2)$, les coordonnées des polynômes sont :

Propriété (lien entre rang et libre/génératrice).

- $\text{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \leqslant p$
  $\text{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = p \Longleftrightarrow$ la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre.
- Dans un espace vectoriel E de dimension n :
  $\text{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \leqslant n$
  $\text{rg}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = n \Longleftrightarrow$ la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est génératrice de E.

Justifications :

Bilan