

# BARYCENTRES.

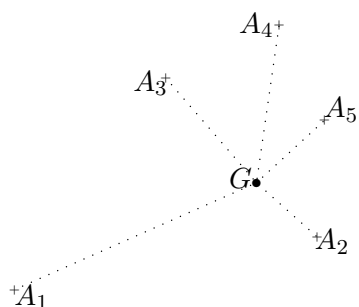
## Théorème et définition.

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des points.

Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des réels tels que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ .

Alors il existe un unique point  $G$  vérifiant  $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ .

Ce point  $G$  est appelé **barycentre du système de points pondérés**  $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ .

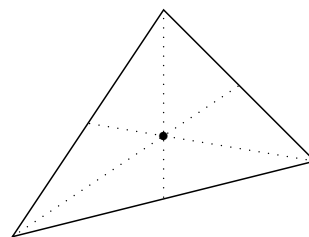


$G$  est le barycentre de  $(A_1, 1), (A_2, 3), (A_3, 1), (A_4, 1)$  et  $(A_5, 1)$ .

**Vocabulaire :** lorsque tous les coefficients sont identiques, on parle d'**isobarycentre**.

L'isobarycentre de deux points correspond au milieu de ces deux points.

L'isobarycentre de trois points correspond au **centre de gravité** du triangle (on peut aussi le construire comme le point d'intersection des médianes du triangle) : si on découpe un triangle en carton, et qu'on met une pointe sous le centre de gravité, le triangle sera en équilibre sur la pointe.



De manière générale, le centre d'inertie d'un solide, et son centre de gravité peuvent être vus comme des barycentres de tous les points de ce solide.

## Théorème de réduction.

Si  $G$  est le barycentre de  $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ , alors pour tout point  $M$ ,  $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$ .

### 1) cas particulier avec deux points

Avec deux points  $A$  et  $B$  et deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha + \beta \neq 0$ .

Le barycentre  $G$  vérifie :  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .

**Exemple :** on dispose d'une planche, aux deux bouts sont disposés des poids, d'une masse de 1kg à l'extrémité  $A$ , et 2kg à l'extrémité  $B$ .

On cherche l'endroit par où il faut porter la planche pour qu'elle soit à l'équilibre. On note  $G$  ce point. Il doit être deux fois plus proche de  $B$  que de  $A$ .

Donc  $G$  est le barycentre de  $(A, 1), (B, 2)$ .

Alors  $1\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$  donc  $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

Donc  $2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{GA}$  soit  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .



**Formule du milieu :** le milieu d'un segment  $[AB]$  est le barycentre de  $(A, 1)$ , et  $(B, 1)$  (ou de  $(A, 3)$  et  $(B, 3)$ ...).

Alors d'après le théorème de réduction, si  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , alors pour tout point  $M$ ,  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .

## 2) cas particulier avec trois points

### Théorème et définition.

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan, et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  des nombres réels tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ .

Alors il existe un unique point  $G$  tel que  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

Ce point est appelé **barycentre du système de points pondérés**  $(A, \alpha), (B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ .

### Théorème de réduction avec 3 points.

On note  $G$  le barycentre de  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ .

Alors pour tout point  $M$ ,  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$ .

**Démonstration :** par définition,  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

donc pour tout point  $M$  :  $\alpha(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + \beta(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) + \gamma(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

$$\alpha \overrightarrow{GM} + \beta \overrightarrow{GM} + \gamma \overrightarrow{GM} + \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = -(\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{GM}$$

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

### Applications :

- pour déterminer les coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C)$$

$$y_G = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C)$$

$$z_G = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C) \text{ (si espace)}$$

(formules obtenues avec le théorème précédent pour  $M = O$ )

Par exemple, on donne  $A(-1, 4)$ ,  $B(3, 0)$  et  $C(3, -2)$ , déterminer les coordonnées de  $G$ , barycentre de  $(A, 1)$ ,  $(B, -2)$  et  $(C, 5)$ .

$$x_G = \frac{1}{1 - 2 + 5} (1 \times (-1) + -2 \times 3 + 5 \times 3) = \frac{1}{4} \times 8 = 2$$

$$y_G = \frac{1}{1 - 2 + 5} (1 \times 4 - 2 \times 0 + 5 \times (-2)) = \frac{1}{4} \times (-6) = -\frac{3}{2}$$

Donc  $G$  a pour coordonnées  $(2, -\frac{3}{2})$ .

- pour construire le barycentre : [appliquer le théorème de réduction et remplacer  $M$  par un des points], par exemple pour  $M = A$  :  $\alpha \overrightarrow{AA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{AG}$ , et  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$  donc on peut exprimer  $\overrightarrow{AG}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

Par exemple, si on donne les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de la figure ci-dessous, et que l'on veut construire le barycentre des points  $(A, -1)$ ,  $(B, 2)$  et  $(C, 1)$ .

Le théorème de réduction donne pour tout point  $M$  :  $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-1 + 2 + 1) \overrightarrow{MG}$ .

Alors pour  $M = A$  ;  $-\vec{0} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$ .

Donc  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

