Espaces vectoriels.
D - Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

★ Exercice 1.

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $F \cup G$.

★ Exercice 2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et H_1 et H_2 des hyperplans (c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$) que l'on suppose distincts.
Démontrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Exercice 3.

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y-z=0\}$.
F et G sont-ils en somme directe ? A-t-on $F+G=\mathbb{R}^3$?
F et G sont-ils supplémentaires ?

2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $a=(1,0,1)$ et $b=(2,1,0)$, et soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $c=(1,1,1)$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mid M \text{ est triangulaire supérieure}\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M \text{ est triangulaire inférieure}\}$.
F et G sont-ils en somme directe ? A-t-on $F+G=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4.

1. Soit E l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x-y+2z=0$.
Montrer que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
Compléter la base trouvée pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

★ **2.** Mêmes questions avec l'ensemble F des vecteurs (x,y,z) tels que $ax+by+cz=0$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

☞ Exercice 5.

On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère P l'ensemble des fonctions paires, et I l'ensemble des fonction impaires.
On a montré dans le DM n°25 que I est un sous-espace vectoriel de E, on admet qu'il en est de même pour P.
Montrer que P et I sont supplémentaires.

★ Exercice 6.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.
On note $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer un supplémentaire.

☞ Exercice 7.

On travaille dans l'espace vectoriel $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$, et on note $A = \mathrm{Vect}\,(X^2 - 1)$ et $B = \mathrm{Vect}\,(X - 1)$.
Montrer que $E = A \oplus B$.

Exercice 8.

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à la décomposition en somme directe.

2. Déterminer les coordonnées de $X^3 - 4X^2 - 5X + 3$ dans cette base.

★ Exercice 9.

On travaille dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice M de E, on appelle trace de M et on note $\mathrm{Tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M. Par exemple, $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 3 + \sqrt{2}$.

1. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

2. Soit $G = \mathrm{Vect}\,(I_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner une base adaptée à la décomposition en somme directe.

3. Déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans cette base.