

# ESPACES VECTORIELS

## D - Intersection et somme de sous-espaces vectoriels.

### I. Intersection de sous-espaces vectoriels

#### Propriété.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Alors  $F \cap G$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $E$ .

#### Démonstration :

**Exemple :** dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + z = 0\}$

#### Propriété.

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

Alors  $\bigcap_{k=1}^p F_k$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .



**Attention :** le plus souvent,  $F \cup G$  n'est pas un espace vectoriel !

### II. Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

#### 1) Somme de sous-espaces vectoriels

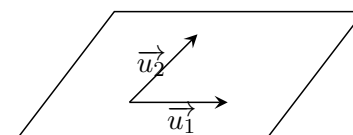
#### Définition.

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On note  $F + G$  l'ensemble des vecteurs de la forme  $u + v$  avec  $u \in F$  et  $v \in G$ .

Ainsi,  $F + G = \{u + v, u \in F \text{ et } v \in G\}$

**Exemple :** dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère deux droites vectorielles  $F$  et  $G$  engendrées par des vecteurs non colinéaires  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ .



**Remarque :**  $\text{Vect}(u, v) + \text{Vect}(w, z) = \text{Vect}(u, v, w, z)$

**Propriété.**

- $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- $F + G$  est le plus petit sous-espace de  $E$  qui contient  $F \cup G$ .

**Preuve :** voir l'exercice 1.

**Traduction du second point :** si un sous-espace vectoriel de  $E$  contient  $F \cup G$ , alors il contient aussi  $F + G$ .

**2) Somme directe de sous-espaces vectoriels****Définitions.**

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels.  
La somme  $F + G$  est dite **directe** lorsque la décomposition  $x = u + v$  avec  $u \in F$  et  $v \in G$  est unique.  
On note alors  $F \oplus G$ .

**Propriété.**

$F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ .

**Démonstration :**

*Précision préliminaire :*  $F \cap G$  est un espace vectoriel, donc il contient au moins le vecteur nul, ainsi, montrer que  $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$  revient à montrer que  $F \cap G \subset \{\mathbf{0}\}$ .

★ «  $\Rightarrow$  »: supposons que  $F$  et  $G$  soient en somme directe, et montrons qu'alors  $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ .

Soit  $x \in F \cap G$ . (on va montrer que  $x = \mathbf{0}$ )

$x \in F$  et  $\mathbf{0} \in G$  donc  $x = x + \mathbf{0}$  est une décomposition de  $x$  dans la somme  $F + G$ .

De même,  $x = \mathbf{0} + x$  en est une autre car  $\mathbf{0} \in F$  et  $x \in G$ .

Or cette décomposition est unique par hypothèse.

Donc  $x = \mathbf{0}$ .

Donc le seul élément de  $F \cap G$  est le vecteur nul. □

★ «  $\Leftarrow$  »: supposons que  $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ , et montrons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

Soit  $x$  dans  $F + G$ , on note  $x = u + v$  et  $x = u' + v'$  deux décompositions de  $x$  dans la somme  $F + G$ .

Alors,  $u + v = u' + v'$ , donc  $u - u' = v' - v$ .

Or  $u$  et  $u'$  sont dans  $F$ , donc  $u - u'$  est dans  $F$  (stable par combinaison linéaire).

De même,  $v' - v \in G$ .

Comme ces deux vecteurs sont égaux, ils sont dans  $F \cap G$ , qui ne contient que  $\mathbf{0}$ , donc  $u - u' = \mathbf{0}$   
donc  $u = u'$  et  $v = v'$ .

Donc la décomposition de  $x$  dans  $F + G$  est unique.

Donc  $F$  et  $G$  sont en somme directe. □

**Méthode :** pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on prend un vecteur dans l'intersection, et on montre que c'est nécessairement le vecteur nul.

**Exemple :**  $F = \text{Vect}(\vec{u})$  avec  $\vec{u} = (-1, 2, 0)$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$ , montrons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

### 3) Somme en dimension finie

#### Propriété : formule de Grassmann.

Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimensions finies.  
Alors  $F + G$  est de dimension finie et  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ .  
En particulier,  $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$ .

**Exemple (suite)** : avec  $F$  et  $G$  de l'exemple précédent, on a déjà montré qu'ils sont en somme directe.

#### Propriété: base et somme directe.

- Si  $F$  et  $G$  sont en somme directe, avec  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  une base de  $F$ , et  $(g_1, g_2, \dots, g_q)$  une base de  $G$ , alors la famille  $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$  est une base de  $F \oplus G$ .
- Si  $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  est une famille libre, alors  $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$  et  $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$  sont en somme directe :  $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .  
En particulier, si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors :  
$$E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

**Exemple (suite et fin)** : toujours les mêmes  $F$  et  $G$ .

Donc d'après la propriété,  $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est une base de  $F \oplus G$  (on dit parfois « obtenue par recollement »).

Or on a montré que  $F \oplus G$  est égal à  $\mathbb{R}^3$ .

Donc  $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

On dit que cette base est *adaptée à la décomposition en somme directe*.

## III. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

### 1) Cas général

#### Définitions.

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels.

Lorsque la somme  $F + G$  est directe et que  $F \oplus G = E$ , on dit que  $F$  et  $G$  sont *supplémentaires*.

**Exemple 1** : on note  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Alors d'après le 2ème point de la propriété ci-dessus,  $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j}) \oplus \text{Vect}(\vec{k}) = \mathbb{R}^3$  : le plan  $(\vec{i}, \vec{j})$  et la droite engendrée par  $\vec{k}$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

Ainsi, tout vecteur de l'espace peut être décomposé de manière unique en somme d'un vecteur du plan  $(\vec{i}, \vec{j})$  avec un vecteur colinéaire à  $\vec{k}$ .



**Exemple 2 :** Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles convergentes, et soient  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  formé des suites convergeant vers 0, et  $G$  celui des suites constantes.

On va montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .



**Méthode pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :**

1. montrer  $F \cap G = \{0\}$  : on prend un élément de l'intersection et on montre qu'il est nécessairement nul ;
2. montrer  $E = F + G$  : on prend un élément de  $E$  et on cherche à l'exprimer comme une somme d'un élément de  $F$  et un élément de  $G$ . (*on peut alors raisonner par analyse et synthèse*)



**Attention :** ne pas confondre supplémentaire (notion liée aux sous-espaces vectoriels) et complémentaires (notion liée aux ensembles).

## 2) Supplémentaires en dimension finie

### Propriété.

$E$  est un espace vectoriel de dimension finie,  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $E = F \oplus G$
- (ii)  $E = F + G$  et  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
- (iii)  $F \cap G = \{0\}$  et  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

**Exemple :** dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ .  
Montrons que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

### Méthode pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie :

1. montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul ;
2. montrer que la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de l'espace.

### Propriété.

$E$  est un espace vectoriel de dimension finie.

Tout sous-espace vectoriel  $F$  a un supplémentaire  $G$  dans  $E$  qui vérifie alors  $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$ .

### Démonstration : (facultative)

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui est de dimension finie, donc  $F$  est de dimension finie.

Donc  $F$  a une base, on la note  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ .

La famille  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  est donc libre.

Ainsi, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille de vecteurs  $(g_1, g_2, \dots, g_q)$  telle que  $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$  soit une base de  $E$ .

On définit alors le sous-espace vectoriel  $G = \text{Vect}(g_1, g_2, \dots, g_q)$ .

Alors, d'après la propriété sur les bases et somme directe,  $F$  et  $G$  sont en somme directe,

et  $F \oplus G = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q) = E$ .

Donc  $G$  est bien un supplémentaire de  $F$ .

Et  $p + q = \dim(E)$ , donc  $q = \dim(E) - p$  soit  $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$ . □