Espaces vectoriels.
C - Dimension finie

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice non indispensable**

☞ Exercice 1.

Pour chacun des espaces ci-dessous, déterminer une famille génératrice, en déduire une base et la dimension.
$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\}$
$F_2 = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, y$ est deux fois dérivable et $y'' + y' + y = 0\}$
F_3 est l'espace vectoriel des suites arithmétiques

★ Exercice 2.

On considère les vecteurs $x = (1, 1, 3)$ et $y = (2, -2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(x, y)$.

2. Montrer que x et y engendrent le même sous-espace vectoriel que $u = (1, -3, -2)$ et $v = (1, 5, 8)$.

3. Compléter la famille (x, y) pour former une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

Soient $f_1 = (1, 0, 0, 0)$ $\quad f_2 = (1, 1, 1, 0)$ $\quad f_3 = (0, -2, -2, 0)$ $\quad f_4 = (0, 0, 0, 1)$ $\quad f_5 = (3, 1, 1, 2)$, et on note $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

1. Déterminer la dimension de F.

2. Extraire de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ une base de F.

Exercice 4.

Dans $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$ on définit quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 par :
$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $\quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f_1 et f_2 forment une famille libre.

2. Déterminer les expressions de $f_1 - f_2$ et $f_1 + f_2$.

3. En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 5.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\mathcal{F} = (A, B, C)$ est libre mais pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser une ou plusieurs matrice(s) de la base canonique).

☞ Exercice 6.

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère les polynômes $P_1 = X^2 - X$, $P_2 = X^2 + X$ et $P_3 = X^2 - 1$.

1. Montrer que ces trois polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.