

# ESPACES VECTORIELS

## C - Dimension finie

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .



**Définition.**

Un espace vectoriel  $E$  est de **dimension finie** si il existe dans  $E$  une famille génératrice finie. Sinon, il est de dimension infinie.

**Exemples :**

- L'espace  $\mathbb{R}^3$  est de dimension finie : .....
- .....
- L'ensemble des polynômes  $\mathbb{R}[X]$  est de dimension infinie : on raisonne par l'absurde.  
Supposons qu'il ait une famille génératrice finie  $P_1, P_2, \dots P_n$ .  
.....  
.....  
.....  
.....

### I. Dimension finie et base

**Théorème de la base extraite.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.  
De toute famille génératrice, on peut extraire une sous-famille qui sera une base de  $E$ .  
En particulier, cela montre que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.



**Remarque :** si l'un des vecteurs d'une famille est une combinaison linéaire des autres, alors on peut le retirer sans changer l'espace vectoriel engendré.

Par exemple si  $w$  est une combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ , alors  $\text{vect}(u, v, w) = \text{vect}(u, v)$ .

**Exemple :** montrer que la famille  $\vec{u} = (1, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, 1)$  et  $\vec{w} = (0, 1)$  est génératrice de  $\mathbb{R}^2$  et en extraire une base.

**Théorème de la base incomplète.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.  
Toute famille libre de  $E$  peut être complétée pour former une base de  $E$ .

**Exemple :** dans  $\mathbb{R}^3$ , on note  $\vec{u} = (1, 0, 1)$  et  $\vec{v} = (1, -1, 1)$ . Nous allons montrer que  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une famille libre mais pas génératrice de  $\mathbb{R}^3$  et on va la compléter en une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Propriété et définition.**



Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul, alors toutes les bases de  $E$  ont même cardinal (nombre de vecteurs), et ce cardinal est appelé **dimension** de l'espace vectoriel  $E$ , noté  $\dim(E)$ .  
Par convention, la dimension de l'espace vectoriel  $\{0\}$  est 0.

**Exemples à retenir :**

- Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1 :  
.....
- Un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension 2 :  
.....  
.....
- $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 :  
par définition :  $\mathbb{C} = \{x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(\dots\dots\dots)$

**Propriété : dimensions des espaces vectoriels usuels.**



- $\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .  
La base canonique est formée des vecteurs  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0 \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ .
- le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbb{K}_n[X]$  est de dimension  $n + 1$ .  
La base canonique est  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ .
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \times p$ .  
La base canonique est  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$  avec  $E_{i,j}$  la matrice nulle partout sauf le coefficient de la ligne  $i$  et la colonne  $j$  qui vaut 1.

**Propriété.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ .  
Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$ .  
De plus  $F = E$  si et seulement si  $\dim(F) = \dim(E)$ .



**Méthode :** pour montrer que deux (sous-)espaces sont égaux, on peut montrer que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont même dimension.  
Voir une application dans l'exercice 2..

## II. Dimension finie et familles

### 1) liée, génératrice, base

#### Propriété (lien entre nombre de vecteurs et libre/génératrice).

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  :

- si  $m > n$ , alors toute famille de  $m$  vecteurs est liée ;
- si  $p < n$ , alors aucune famille de  $p$  vecteurs ne peut être génératrice ;
- toute famille libre de  $n$  vecteurs est une base ;
- toute famille génératrice de  $n$  vecteurs est une base.



**Exemple :** montrer que  $P_1 = 1 + X + X^2$ ,  $P_2 = 3 + X$  et  $P_3 = -X^2$  forment une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .



**Méthode :** pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , on a désormais 4 possibilités :

- ★ montrer que la famille est libre et génératrice de  $E$  ;
- ★ montrer que la famille est libre et qu'elle est formée de  $n$  vecteurs ;
- ★ montrer que la famille est génératrice de  $E$  et qu'elle est formée de  $n$  vecteurs ;
- ★ montrer que tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille, ce qui nous donne en même temps les coordonnées.

### 2) rang d'une famille de vecteurs

#### Définition.

On appelle *rang d'une famille de vecteurs* la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

Concrètement, si  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ , alors  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$ .

#### Propriété.

Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs dans une base.



**Exemple :** dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , on note  $P_1 = 1 - X + X^2$ ,  $P_2 = -1 + X + 3X^2$  et  $P_3 = -1 + X + X^2$ , et déterminons le rang de la famille  $(P_1, P_2, P_3)$ .

Dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  :  $(1, X, X^2)$ , les coordonnées des polynômes sont :

**Propriété (lien entre rang et libre/génératrice).**

- $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq p$   
 $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = p \iff$  la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est libre.
- Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  :  
 $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq n$   
 $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = n \iff$  la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  est génératrice de  $E$ .

**Justifications :**

---

BILAN

---