

# ESPACES VECTORIELS.

## B - Familles de vecteurs

☞ **Exercice basique à savoir refaire**

★ **Exercice non indispensable**

### Exercice 1.

Soient  $v_1 = (2, 1, 4)$ ,  $v_2 = (1, -1, 2)$  et  $v_3 = (3, 3, 6)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Trouver trois réels non tous nuls  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ .  
 Que peut-on en déduire pour la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  ?

### ☞ Exercice 2.

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. famille  $(P, Q, R)$  avec  $P = 1 + X^2$ ,  $Q = X^2$  et  $R = 2 + 3X$ .

2. famille  $(A, B, C)$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ 2 & 15 & -7 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 3.

Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ? de l'espace vectoriel  $E$ .

1.  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , on considère la famille  $(u, v)$  où  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n^2$  et  $v_n = n + 1$  ;

2.  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , la famille considérée est  $(f_0, f_1, f_2)$  où  $\forall k \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_k(x) = e^{kx}$ .

### Exercice 4.

1. (a) Déterminer l'ensemble  $F$  des solutions du système  $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$ .

(b) Justifier que  $F$  est un espace vectoriel et en déterminer une base.

2. On considère les deux plans vectoriels  $P_1$  et  $P_2$  d'équations respectives  $x - y + z = 0$  et  $x - y = 0$ .  
 Trouver un vecteur directeur ainsi qu'une équation paramétrée de la droite  $D = P_1 \cap P_2$ .

### ☞ Exercice 5.

Montrer que les polynômes  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = 1 + X$  et  $P_2 = 1 + X + X^2$  forment une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et préciser les coordonnées de  $P = aX^2 + bX + c$  dans cette base.

### Exercice 6.

On se place dans  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , et on note  $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$ .

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et déterminer une base de  $F$ .

*Bonus : en utilisant une autre manière de décroire  $F$ , trouver une 2ème base.*

### ★ Exercice 7.

Montrer que les vecteurs  $v_1 = (1, -1, i)$ ,  $v_2 = (-1, i, 1)$  et  $v_3 = (i, 1, -1)$  forment une base de  $\mathbb{C}^3$  (vu comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel).

Calculer les coordonnées de  $u = (1 + i, 1 - i, i)$  dans cette base.