Espaces vectoriels.
A - Introduction

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

★ Exercice 1.

Soient $(E, +_E, .)$ et $(F, +_F, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On définit une addition sur $E \times F$ par $(u, v) + (u', v') = (u +_E u', v +_F v')$ (addition par composante), et la multiplication par un scalaire $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ (multiplication de chaque composante).
Vérifier que $E \times F$ muni de ces deux opérations est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

☞ Exercice 2.

Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
$A = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$
$B = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1\}$

Exercice 3.

Pour chacun des ensembles ci-dessous, déterminer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ou pas.

$$A = \left\{ \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \overrightarrow{v} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ orthogonaux} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 = y^2 \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + z = 0 \right\}$$

☞ Exercice 4.

Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 1\}$ sous-espace de $\mathbb{R}^2$?

2. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, f \text{ s'annule au moins une fois}\}$ sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

3. $C = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,\ a + d = b + c \right\}$ sous-espace de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$?

4. $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ sous-espace de $\mathbb{C}$?

5. $E = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(0) = 0\}$ sous espace de $\mathbb{K}[X]$?

★ Exercice 5.

Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$.