Lois usuelles.

☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

Voici le tableau incomplet de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_k	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_k)$	$\frac{27}{125}$			$\frac{8}{125}$

On sait que X suit une loi binomiale, compléter le tableau, et calculer son espérance et sa variance.

☞ Exercice 2.

Une usine contient 2 machines : la machine A, qui fabrique 80% des pièces, et la machine B qui fabrique les 20% restant. À la sortie de l' usine, on contrôle l'état des pièces fabriquées.
On sait que :
- la machine A produit 10% de pièces défectueuses ;
- la machine B produit 5% de pièces défectueuses ;
- les défauts des pièces sont produits aléatoirement et indépendamment des autres pièces.

Lorsque l'on considère une pièce, on appelle D l'événement « la pièce est défectueuse », A « la pièce a été fabriquée par la machine A » et B « la pièce a été fabriquée par la machine B ».

1. Justifier que $\mathbf{P}(D) = \frac{9}{100}$.

2. On a trouvé une pièce défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit issue de la machine A ?

3. On prélève maintenant 200 pièces du stock en sortie de l'usine. On appelle X la variable aléatoire du nombre de pièces défectueuses sur ce lot de 200. On suppose le stock assez grand pour que le prélèvement des 200 pièces puisse être assimilé à une succession de 200 tirages avec remise.

(a) Reconnaître la loi de X (justification correcte exigée bien sûr !). On donnera les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $\mathbf{P}(X = k)$.

(b) Donner l'espérance et la variance de X.

(c) Lorsque l'entreprise vend les pièces, elle est payée 5 euros par pièce correcte, mais doit rendre 1 euro par pièce qui s'est avérée défectueuse. On note R la recette de l'entreprise sur le lot de 200 pièces. Exprimer R en fonction de X, puis déterminer la recette moyenne d'un lot.

4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un minorant de la probabilité que le nombre de pièces défecteuses soit entre 14 et 22.

★ Exercice 3.

On note $x \in]0, 1[$ la probabilité qu'un moteur d'avion tombe en panne. On suppose que les pannes des différents moteurs sont indépendantes les unes des autres.

1. On note X_3 la variable aléatoire correspondant au nombre de moteurs en panne sur un avion trimoteur, et X_4 le nombre de moteurs en panne sur un quadrimoteurs.

(a) Quelles sont les lois de X_3 et X_4 ?

(b) Déterminer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs d'un avion soient en panne, dans chacun des cas.

2. On considère qu'un trimoteur peut encore voler si son moteur de queue ou les deux moteurs des ailes fonctionnent encore, et on note T cet événement : démontrer que $\mathbf{P}(T) = (1-x)(-x^2+x+1)$.

3. Un quadrimoteur peut encore voler si au moins un moteur sous chaque aile fonctionne encore. Déterminer la probabilité de l'événement Q : « un quadrimoteur peut encore voler ».

4. Quel avion est le plus sûr ?

Exercice 4.

Une urne contient 13 boules, numérotées de 1 à 13 et indiscernables au toucher. On les pioche une à une, au hasard et sans remise, jusqu'à obtenir la boule portant le numéro 13. On note X le nombre de boules piochées.
Démontrer que X suit une loi usuelle, puis donner son espérance et sa variance.

Exercice 5.

On cherche à déceler la présence d'un virus dans une population. On procède pour cela à des analyses de sang : l'analyse est dite positive lorsque le virus est détecté dans l'échantillon analysé.
Pour réduire le nombre d'analyses, on propose de regrouper la population en g groupes de n individus chacun, de regrouper le sang des n individus dans une éprouvette, et de tester cette éprouvette : si le test est positif, on fait alors une analyse de sang pour chaque personne de ce groupe.
On estime que le virus est présent chez 1% des personnes et on note N le nombre total de personnes ($N = ng$).
On suppose que la présence du virus chez une personne est indépendante des autres personnes.

☞ **1.** **(a)** Déterminer la probabilité que le virus soit présent dans un regroupement de n individus.

(b) On note X le nombre de groupes pour lesquels l'analyse est positive.
Déterminer la loi suivie par X.

2. Exprimer en fonction de X, le nombre Y d'analyses nécessaires avec cette méthode de groupement, et déterminer $E(Y)$.

3. Cette méthode est-elle intéressante pour une population de $N = 1000$ personnes et des groupes de $n = 100$ personnes ?

Exercice 6. (auteur à retrouver !)

Dans une fête foraine, un jeu propose de piocher une boule dans une urne qui en contient 14 numérotées de 1 à 14. Les boules sont indiscernables au toucher. On repart avec l'équivalent en euros du numéro pioché.

1. On note G la variable aléatoire du gain en euros. Calculer $E(G)$.

2. S'il faut désormais payer pour jouer, jusqu'à quel tarif acceptez-vous de jouer ? argumentez.

Exercice 7. (auteur à retrouver !)

Pour déterminer avec ma sœur, lequel de nous deux fera la vaisselle, on lance un dé équilibré à 20 faces. Comme je suis l'aîné, on a décidé que si le dé donne un chiffre entre 7 et 20 (7 et 20 inclus), c'est moi qui fais la vaisselle. Ma sœur gagne si elle ne fait pas la vaisselle. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si ma sœur gagne et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Pour ne pas être totalement perdant, si je fais la vaisselle, ma sœur me donne 3 euros, mais pour me faire pardonner, je lui donne avant le tirage au sort 2 euros.
Soit Z la variable aléatoire qui donne le gain de ma sœur.
Donner la loi de Z ainsi que son espérance.
Interpréter.

Exercice 8.

On lance n fois un dé équilibré, et on note X_n la variable aléatoire du nombre de fois où l'on obtient un 6 au cours des n lancers.

☞ **1.** Quelle est la loi de X_n ? donner son espérance et sa variance.

2. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $\frac{X_n}{n}$, déterminer un nombre minimum de lancers pour être sûr à 95% d'obtenir une proportion de 6 comprise entre $\frac{1}{6} - 0,1$ et $\frac{1}{6} + 0,1$.