

# LOIS USUELLES.

☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**

★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

## Exercice 1.

Voici le tableau incomplet de la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  :

$x_k$	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_k)$	$\frac{27}{125}$			$\frac{8}{125}$

On sait que  $X$  suit une loi binomiale, compléter le tableau, et calculer son espérance et sa variance.

## ☞ Exercice 2.

Une usine contient 2 machines : la machine A, qui fabrique 80% des pièces, et la machine B qui fabrique les 20% restant. À la sortie de l'usine, on contrôle l'état des pièces fabriquées.

On sait que : – la machine A produit 10% de pièces défectueuses ;

– la machine B produit 5% de pièces défectueuses ;

– les défauts des pièces sont produits aléatoirement et indépendamment des autres pièces.

Lorsque l'on considère une pièce, on appelle  $D$  l'événement « la pièce est défectueuse »,  $A$  « la pièce a été fabriquée par la machine A » et  $B$  « la pièce a été fabriquée par la machine B ».

- Justifier que  $\mathbf{P}(D) = \frac{9}{100}$ .
- On a trouvé une pièce défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit issue de la machine A ?
- On prélève maintenant 200 pièces du stock en sortie de l'usine. On appelle  $X$  la variable aléatoire du nombre de pièces défectueuses sur ce lot de 200. On suppose le stock assez grand pour que le prélèvement des 200 pièces puisse être assimilé à une succession de 200 tirages avec remise.
  - Reconnaître la loi de  $X$  (justification correcte exigée bien sûr !). On donnera les valeurs prises par  $X$  et pour chacune de ces valeurs  $k$  la valeur de  $\mathbf{P}(X = k)$ .
  - Donner l'espérance et la variance de  $X$ .
  - Lorsque l'entreprise vend les pièces, elle est payée 5 euros par pièce correcte, mais doit rendre 1 euro par pièce qui s'est avérée défectueuse. On note  $R$  la recette de l'entreprise sur le lot de 200 pièces. Exprimer  $R$  en fonction de  $X$ , puis déterminer la recette moyenne d'un lot.
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un minorant de la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit entre 14 et 22.

## ★ Exercice 3.

On note  $x \in ]0, 1[$  la probabilité qu'un moteur d'avion tombe en panne. On suppose que les pannes des différents moteurs sont indépendantes les unes des autres.

- On note  $X_3$  la variable aléatoire correspondant au nombre de moteurs en panne sur un avion trimoteur, et  $X_4$  le nombre de moteurs en panne sur un quadrimoteurs.
  - Quelles sont les lois de  $X_3$  et  $X_4$  ?
  - Déterminer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs d'un avion soient en panne, dans chacun des cas.
- On considère qu'un trimoteur peut encore voler si son moteur de queue ou les deux moteurs des ailes fonctionnent encore, et on note  $T$  cet événement : démontrer que  $\mathbf{P}(T) = (1-x)(-x^2+x+1)$ .
- Un quadrimoteur peut encore voler si au moins un moteur sous chaque aile fonctionne encore. Déterminer la probabilité de l'événement  $Q$  : « un quadrimoteur peut encore voler ».
- Quel avion est le plus sûr ?

**Exercice 4. (Gautier)**

Julien fait un pari avec ses parents pour savoir quelle note il aura au DS. Son père lui propose de lui donner 20 euros s'il a plus de 16. Julien va au contrôle au talent, il a (donc ?) une note aléatoire entre 1 et 20, sachant qu'il y a 15 contrôles et que ces derniers ne s'influencent pas entre eux.

On note  $X$  la variable aléatoire du nombre de fois où Julien a eu 16 ou plus au DS.

1. Déterminer la loi de  $X$ , puis calculer son espérance et sa variance.
2. On note  $G$  la variable aléatoire qui donne le gain de Julien à la fin de l'année. Quelle est l'espérance de  $G$  ?

**Exercice 5. (Lucas)**

Un bandit a dérobé le ressort pédagogique de M. Jimenez. Heureusement, Tintin et Milou sont là et lui courent après pour l'arrêter ! Le malandrin est rentré dans un hôtel où il y a 10 chambres. Tintin et Milou ne savent pas où le brigand est entré.  $Y$  est la variable aléatoire qui donne le numéro de la chambre choisie par Tintin et Milou, ils l'ont choisie au hasard.

Quelle est la loi de  $Y$  ?

**Exercice 6.**

On cherche à déceler la présence d'un virus dans une population. On procède pour cela à des analyses de sang : l'analyse est dite positive lorsque le virus est détecté dans l'échantillon analysé.

Pour réduire le nombre d'analyses, on propose de regrouper la population en  $g$  groupes de  $n$  individus chacun, de regrouper le sang des  $n$  individus dans une éprouvette, et de tester cette éprouvette : si le test est positif, on fait alors une analyse de sang pour chaque personne de ce groupe.

On estime que le virus est présent chez 1% des personnes et on note  $N$  le nombre total de personnes ( $N = ng$ ).

On suppose que la présence du virus chez une personne est indépendante des autres personnes.

1. (a) Déterminer la probabilité que le virus soit présent dans un regroupement de  $n$  individus.  
(b) On note  $X$  le nombre de groupes pour lesquels l'analyse est positive.  
Déterminer la loi suivie par  $X$ .
2. Exprimer en fonction de  $X$ , le nombre  $Y$  d'analyses nécessaires avec cette méthode de groupement, et déterminer  $E(Y)$ .
3. Cette méthode est-elle intéressante pour une population de  $N = 1000$  personnes et des groupes de  $n = 100$  personnes ?

**Exercice 7. (inspiré par Luka)**

On lance  $n$  fois un dé équilibré, et on note  $X_n$  la variable aléatoire du nombre de fois où l'on obtient un 6 au cours des  $n$  lancers.

1. Quelle est la loi de  $X_n$  ? donner son espérance et sa variance.
2. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire  $\frac{X_n}{n}$ , déterminer un nombre minimum de lancers pour être sûr à 95% d'obtenir une proportion de 6 comprise entre  $\frac{1}{6} - 0,1$  et  $\frac{1}{6} + 0,1$ .
- ★ 3. M. Brayer s'amuse à fabriquer un dé avec son imprimante 3D. En utilisant la question précédente, proposer à M. Brayer une expérience pour tester les chances que son dé soit équilibré (on suppose que M. Brayer a vraiment beaucoup de temps pour lancer le dé !).