Lois usuelles

Dans ce chapitre, nous allons étudier des lois issues de situations qui reviennent souvent, de sorte que lorsque l'on reconnaîtra de telles situations, nous n'aurons plus besoin de recalculer les probabilités, l'espérance, la variance ...

I. Loi certaine

Cette loi provient de la situation où il n'y a qu'une seule valeur possible pour la variable aléatoire : $X(\Omega) = \{a\}$, la probabilité de cette valeur est donc 1.

La variable aléatoire X suit la loi certaine de paramètre a lorsque $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbf{P}(X = a) = 1$.

Alors $\boxed{E(X) = \dots}$ et $\boxed{V(X) = \dots}$.

II. Loi uniforme

1) situation-type

Une boîte contient 7 boules numérotées de 1 à 7 indiscernables au toucher.
On tire une boule au hasard dans la boîte.
La variable aléatoire X donne le numéro de la boule tirée.

2) loi

Dans la situations décrite ci-dessus, on a autant de chances de tirer chaque boule, on dit alors que la loi de probabilité de X est la ***loi uniforme***.

Cette loi est donnée par $X(\Omega)$ ....

La loi uniforme correspond à une situation d'***équiprobabilité*** de chacune des valeurs prises par X.

Définition.

Une variable aléatoire X ***suit la loi uniforme sur*** $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si :
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbf{P}(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; n]\!])$ signifie « X suit la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$ ».

3) espérance et variance

Propriété.

⋆ Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$, alors $E(X) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$.

⋆ Cas particulier : si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; n]\!])$, alors : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

Preuve de la formule de l'espérance du cas particulier :

4) exemple d'utilisation

On lance un dé équilibré à 6 faces, X est le numéro obtenu.

1. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance et sa variance.

2. Un jeu consiste à payer 10 euros, puis lancer un dé : on gagne alors en euros, trois fois le résultat du dé. Ce jeu est-il équilibré ? (*on pourra noter G la variable aléatoire correspondant au gain à la fin du jeu*)

III. Loi de Bernoulli

1) épreuve de Bernoulli

Exemple : une boîte contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher, on pioche une boule au hasard dans la boîte, on gagne si la boule est noire, et on perd sinon.
Cette expérience a deux issues possibles :
– un succès : la boule tirée est noire ;
– un échec : la boule tirée est blanche.
Une telle expérience est une ***épreuve de Bernoulli***.

Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire qui comporte deux issues, un succès et un échec.

2) loi

Suite de l'exemple : on peut définir une variable aléatoire X qui vaut 1 si la boule tirée est noire et 0 si la boule est blanche.
Alors la loi de X est donnée par $X(\Omega) =$ ....

Cette loi est appelée ***loi de Bernoulli de paramètre*** $0,7$.

Définition.
Soit X une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs 0 et 1.
On note $p = \mathbf{P}(X = 1)$, alors on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Ainsi, la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ signifie $\boxed{X(\Omega) = \{0; 1\},\ \mathbf{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p}$.
(on note parfois $q = 1 - p$)
L'événement $(X = 0)$ est appelé ***échec*** et $(X = 1)$ est le ***succès***.

3) espérance et variance

Propriété.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p) = pq$.

En effet, ...

....

....

4) exemple d'utilisation

On lance une pièce équilibrée, on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la pièce donne pile, et 0 si c'est face.

....

IV. Loi binomiale

1) schéma de Bernoulli

Exemple : une boîte contient 3 boules blanches et 7 boules noires.
On joue 30 parties du même jeu : piocher une boule au hasard dans la boîte.
On remet la boule piochée dans la boîte avant de procéder au tirage suivant (de sorte que les tirages sont indépendants les uns des autres).
Pour chaque partie, on gagne si l'on pioche une boule noire.
Une telle expérience est un ***schéma de Bernoulli***.

Un ***schéma de Bernoulli*** est une expérience aléatoire qui consiste en la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes les unes des autres.

2) loi binomiale

Suite de l'exemple : on peut définir la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires piochées au cours des 30 parties.
La loi de X est la ***loi binomiale de paramètres 30 et*** $0,7$, que l'on note $\mathcal{B}(30;0,7)$.
Autrement dit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(30;0,7)$.

Définition.

Dans un schéma de Bernoulli, on peut définir une variable aléatoire X égale au nombre de succès.
Si le schéma comporte n répétitions et que la probabilité de succès à chaque épreuve est p, alors la loi de X est appelée ***loi binomiale de paramètres*** n ***et*** p, notée $\mathcal{B}(n,p)$.

Autrement dit, X suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsque :

- on répète n fois la même épreuve,
- les épreuves sont indépendantes les unes des autres,
- chaque épreuve a 2 issues :
  - un succès de probabilité p
  - un échec de probabilité $1-p$

  épreuve de Bernoulli

  schéma de Bernoulli
- X est la variable aléatoire du nombre de succès à l'issue des n répétitions.

Théorème.

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!], \text{ et pour tout } k \text{ de } [\![0;n]\!], \ \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Justification :

3) espérance et variance

Propriété.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$, alors $\boxed{E(X) = np}$ et $\boxed{\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = npq}$.

4) Exemple d'utilisation

Une boîte contient 10 boules indiscernables au toucher : 2 noires et 8 blanches. Un joueur tire 11 fois de suite, avec remise entre chaque tirage, une boule dans cette boîte. On appelle X la variable aléatoire du nombre de boules noires obtenues.

1. Reconnaître la loi de X. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, et pour chaque entier k de $X(\Omega)$, une expression de $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de k.

2. Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 4 fois une boule blanche ?

3. Il gagne 8 euro par boule noire et perd 2 euros par boule blanche, quel est le gain moyen espéré à l'issue des 11 tirages ?