Droites et cercles dans le plan.

La géométrie est au départ la science de la mesure de la terre, et elle se pratique sur le terrain. Les problèmes de partage de territoire occupent une place importante, du fait de leur importance dans les sociétés dont l'économie est essentiellement basée sur l'agriculture.

Les instruments de géométrie de l'époque sont alors la corde, et la règle (corde tendue, avec des nœuds à intervalles réguliers), les premières figures étudiées sont donc naturellement les cercles et les droites.

Ce n'est qu'à partir du XVIè siècle que le calcul littéral est formalisé, et ce sont René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (17è siècle) qui initieront l'usage systématique des coordonnées et de l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques.

Rappels : soient deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\iff \dots$

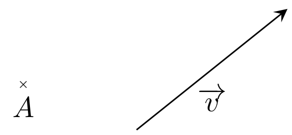
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\iff \dots$

I. Droites

On peut définir une droite de 3 façons :
- ⋆ un point et un vecteur directeur ;
- ⋆ deux points ;
- ⋆ un point et un vecteur normal.

Définition.

- Soit A un point du plan, et $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul.
  On appelle ***droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$*** l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$.



- Soient A et B deux points distincts du plan.
  La droite (AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

- Tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul orthogonal à $\overrightarrow{v}$ est un ***vecteur normal*** à la droite.
  La droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ est aussi la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1) Équations cartésienne et paramétrique

a. Équation cartésienne

Propriété.

Le plan est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite.
Réciproquement, toute droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
Une équation $ax + by + c = 0$ est appelée ***équation cartésienne***.

Méthode pour obtenir une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ . . .

. . . passant par un point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$:

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0 \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

$$\iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

. . . passant par un point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

$$\iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

Exemples : • Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(-3,2)$ et $B(1,5)$.

• La droite $\mathcal{D}_2$ a pour équation cartésienne $3x-2y+1=0$.
Elle passe par le point $B(1,\dots)$ car ...
Un vecteur directeur est $\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$, et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.

Dans une équation cartésienne $ax+by+c=0$, $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Remarque : une équation cartésienne sous forme $ax+by+c=0$ regroupe les cas $y=mx+p$ pour une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, et $x=k$ pour une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Ces deux dernières équations sont appelées équations cartésiennes ***réduites***.

b. Système d'équations paramétriques

Rappel, avec $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur non nul, et $M(x,y)$:

$\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v} \iff \exists t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{v} \iff \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

Propriété.

On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

$$M(x,y)\in\mathcal{D} \iff \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\end{cases}$$

Notation : on dit que $\boxed{\text{la droite } \mathcal{D} \text{ a pour } \textbf{\textit{système d'équations paramétriques}} : \begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}}$.

Exemples :

• Une droite $\mathcal{D}_1$ a pour système d'équations paramétriques $\begin{cases}x=3t-2\\y=-27t+4\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Elle passe par les points $A(\dots,\dots)$ et $B(\dots,\dots)$.

Elle a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$. Et $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

• Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_2$ qui passe par $B(1,-3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$:

Dans un système d'équations paramétriques $\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\y=\beta t+y_A\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

c. Lien direct entre ces deux types d'équations

⋆ $\mathcal{D}_1$ a pour équation cartésienne $2x-3y+6=0$.

Or $2x-3y+6=0 \iff$ .... $\iff y=$ ....

Ainsi, $\mathcal{D}_1$ a pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=t \\ y= \text{..........} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

⋆ Soit $\mathcal{D}_2$ une droite qui a pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=2t-4 \\ y=-t+3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x=2t-4 \\ y=-t+3 \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_2$ est donc ....

2) Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite

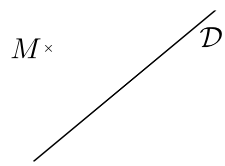
Définitions.

Soit M un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite, on appelle ***projeté orthogonal de*** M ***sur*** $\mathcal{D}$ le point H tel que :

⋆ H appartient à $\mathcal{D}$

⋆ les droites (MH) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.

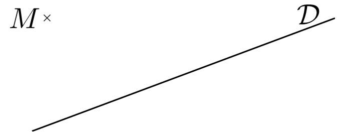
La ***distance entre*** M ***et la droite*** $\mathcal{D}$, notée $d(M,\mathcal{D})$ est MH.



Exemple : soit M le point de coordonnées $(-2,1)$, de $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x+y-2=0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. On notera H ce projeté. En déduire la distance de M à $\mathcal{D}$.

Méthode : pour trouver les coordonnées du projeté H sur la droite $\mathcal{D}$, on traduit les deux caractéristiques géométriques en 2 équations d'inconnues x_H et y_H, en s'aidant d'un dessin !

Si A est un point de la droite, $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal, et $ax+by+c=0$ une équation :



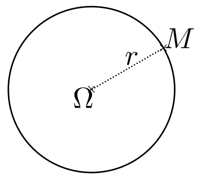
- H est sur la droite : ....
- (MH) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires : ....

Remarque : la distance entre M et son projeté orthogonal H sur $\mathcal{D}$ est la plus petite distance entre M et un point de $\mathcal{D}$, en effet, si A est un autre point de $\mathcal{D}$:

II. Cercles

Définition.

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ un point du plan, et r un nombre positif.
Le ***cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r*** est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = r$.



1) Équation cartésienne

Propriété.

Une ***équation cartésienne*** d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon r est :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$$

Exemple : on note $A(2, -3)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2, déterminer une équation sous forme développée de $\mathcal{C}$.

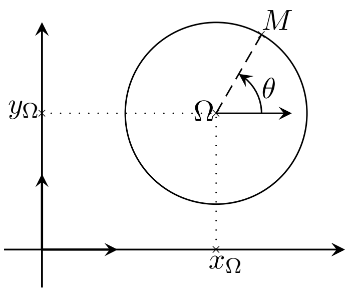
Méthode : pour déterminer si une équation de degré deux représente un cercle, on utilisera les égalités suivantes : $\boxed{x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2}$ ou $\boxed{x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2}$

(obtenues par identités remarquables : ....)
C'est le même principe que pour la forme canonique d'un polynôme.

Exemple : justifier que l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$ est l'équation d'un cercle et en déterminer son centre et son rayon.

Attention, les équations de ce type ne sont pas toujours des équations de cercle.
Quel est l'ensemble des points vérifiant $x^2 + y^2 - x + 4y + 5 = 0$?

2) Représentation paramétrique



Propriété.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon r :

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = r\cos(\theta) + x_\Omega \\ y = r\sin(\theta) + y_\Omega \end{cases}$$

Notation : une ***représentation paramétrique*** du cercle $\mathcal{C}$ est : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) + x_\Omega \\ y = r\sin(\theta) + y_\Omega \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemple : représentation paramétrique du cercle de centre $(1, -\frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

III. Problèmes géométriques

1) Intersection de deux droites

La nature de l'intersection se détermine grâce aux vecteurs directeurs.
L'intersection de deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est :

⋆ un point si les droites sont ***sécantes*** : ....

⋆ vide si les droites sont ***strictement parallèles*** : ....

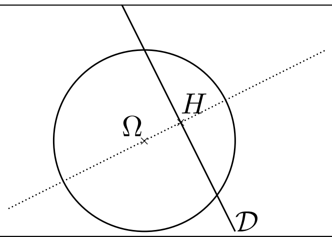
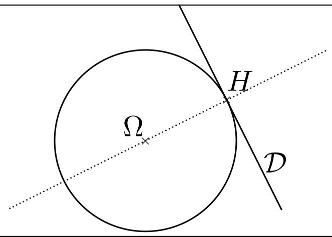
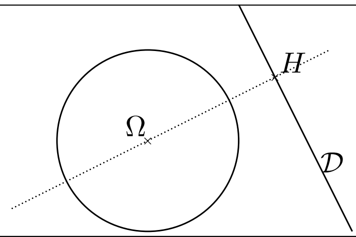
⋆ $\mathcal{D}_1$ si les deux droites sont ***confondues*** : ....

Exemple : dans chacun des cas, donner l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$:

1. $\mathcal{D}_1 : x - 3y - 2 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : -2x + y + 1 = 0$

2. $\mathcal{D}_1 : 3x - 2y + 5 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 4 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

2) Intersection d'un cercle avec une droite

sécants		non sécants
		
$d(\Omega, \mathcal{D}) \ldots\ldots$	$d(\Omega, \mathcal{D}) \ldots\ldots$	$d(\Omega, \mathcal{D}) \ldots\ldots$
$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \ldots$	$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \ldots$	$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \ldots$

Propriété.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon r et de centre Ω, et A un point appartenant à $\mathcal{C}$.
La tangente à $\mathcal{C}$ au point A est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.

Exemple : soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(3, 2)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.
Vérifier que le point $A(1, 0)$ est sur le cercle, et déterminer une équation de la tangente en A.