Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

☞ Exercice 1.

Déterminer si les familles suivantes sont libres ? génératrices (de $\mathbb{R}^2$ pour le **1.** et $\mathbb{R}^3$ pour les autres) ?

1. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

☞ Exercice 2.

1. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Que peut-on en conclure sur la famille de vecteurs $F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$, avec $\overrightarrow{u_1} = (2, -2, 3)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1, -1, 2)$, $\overrightarrow{u_3} = (3, -1, 2)$, $\overrightarrow{u_4} = (-2, -2, 3)$.

3. Soit $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que $\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + \lambda_3 \overrightarrow{u_3} + \lambda_4 \overrightarrow{u_4}$.

Exercise 3.

Let $\mathcal{F} = \{(2, 0, 2, 1),\ (-2, 0, 2, 0),\ (2, 1, 4, 1)\}$ be a set of vectors.
Is it linearly independant ? Does it generate $\mathbb{R}^4$?

★ Exercice 4.

Soit m dans $\mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de m, du caractère libre et du caractère générateur de $\mathbb{R}^3$ de la famille de vecteurs $(1, 1, m)$, $(1, m, 1)$ et $(m, 1, 1)$.

Exercice 5.

Résoudre le système $\begin{cases} x + y - 2z - t = 0 \\ x - y + 2z + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$.

En déduire le caractère libre ou générateur (de $\mathbb{R}^3$) de la famille formée par $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{w} = (-2, 2, 2)$ et $\overrightarrow{t} = (-1, 1, -1)$.

★ Exercice 6.

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$.

1. Montrer que $(-1, -1, 1)$ appartient à F.

2. Montrer que $F = \operatorname{Vect}((1, 2, 0), (0, 1, 1))$.
On pourra résoudre le « système » $\{2x - y + z = 0$ *en isolant* y.

3. Déterminer deux réels λ_1 et λ_2 tels que $(-1, -1, 1) = \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 1, 1)$.
Existe-t-il deux réels μ_1 et μ_2 tels que $(2, 3, 1) = \mu_1(1, 2, 0) + \mu_2(0, 1, 1)$?

★ Exercice 7.

On note $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$.
Déterminer une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ telle que $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
Les vecteurs trouvés forment-ils une famille libre ?