

FAMILLES DE VECTEURS DE \mathbb{R}^n .

Rappels : le rang d’une matrice est
Deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont colinéaires lorsque
.....
Ils ne sont pas colinéaires lorsque,

Introduction en dimension 3 : on note $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
L’égalité $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 = \vec{0}$ se traduit par le système $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 = 0 \end{cases}$ (inconnues α et β).
Les vecteurs ne sont pas colinéaires si et seulement si la seule solution potentielle du système est $(0, 0)$.
Or $(0, 0)$ est toujours une solution de ce système (il est homogène).
Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires si et seulement si le système a une unique solution, autrement dit
la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ est de rang

On rappelle que 2 vecteurs non colinéaires forment une **famille libre**, et 2 vecteurs colinéaires forment une **famille liée**.
On peut donc résumer (et généraliser) ce qui précède : 2 vecteurs forment une famille libre si et seulement si la matrice formée par les coordonnées de ces vecteurs en colonne est de rang 2.

I. Vocabulaire d’algèbre linéaire.

Un élément de \mathbb{R}^n est appelé **vecteur**, on peut le noter en colonne, ou en ligne, par exemple pour un vecteur de \mathbb{R}^3 , $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$, ou $\vec{u} = (2, \frac{1}{3}, -3)$.

On note $\vec{0}$ (ou simplement **0**), le **vecteur nul** : $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_n$ ou $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)_n$.

Nous pouvons ajouter deux vecteurs, et les multiplier par un nombre, tout comme avec les vecteurs du plan ou de l’espace. Le nombre avec lequel on multiplie s’appelle le **scalaire**.

Par exemple, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$ et $3\vec{u} - 4\vec{v} =$
(3 et -4 sont des **scalaires**)

Et si $\vec{w} = (0, 1, 4)$ et $\vec{z} = (2, -1, \sqrt{2})$, on a $-\vec{w} + 3\vec{z} = \dots$

Une **famille de vecteurs** est une liste de vecteurs (du même ensemble), par exemple avec \vec{w} et \vec{z} ci-dessus, qui sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 , alors $\mathcal{F} = (\vec{w}, \vec{z})$ est une famille de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Définition.

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .
• On appelle **combinaison linéaire** de \mathcal{F} tout vecteur de la forme $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_p\vec{u}_p$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des nombres de \mathbb{R} .
• L’ensemble des combinaisons linéaires d’une famille \mathcal{F} est noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$:
$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

II. Familles libres

Définition.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

- La famille \mathcal{F} est **libre** lorsque la seule combinaison linéaire égale à $\vec{0}$ est celle dont tous les scalaires sont nuls :
$$\text{si } \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0} \text{ alors } \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k = 0.$$
- Si \mathcal{F} n'est pas libre, elle est dite **liée** :

Cas particuliers :

- ★ deux vecteurs forment une famille libre si et seulement si
- ★ trois vecteurs de l'espace forment une famille libre si et seulement si

Exemple : soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est-elle libre ?

Propriété.

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .
On note A la matrice dont les p colonnes sont les coordonnées des p vecteurs.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est libre ;
- (ii) le système homogène de matrice A a pour seule solution $(0, 0, \dots, 0)$;
- (iii) le rang de A est p (autrement dit : le nombre de pivots est le nombre de colonnes).



Méthode : pour savoir si des vecteurs forment une famille libre ou liée, on peut :

- former la matrice des vecteurs en colonnes ;
- l'échelonner (avec pivot de Gauss) ;
- compter le nombre de pivots : s'il y en a autant que de colonnes, la famille est libre, sinon elle est liée.

III. Familles génératrices

Définition.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

La famille \mathcal{F} est **génératrice** de \mathbb{R}^n si et seulement si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

.....

Exemple : la famille formée par $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ est génératrice de \mathbb{R}^2 .

Preuve :

Propriété.

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

On note A la matrice dont les p colonnes sont les coordonnées des p vecteurs.

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est génératrice de \mathbb{R}^n ;
- (ii) pour tout B de \mathbb{R}^n , le système de matrice augmentée $(A|B)$ est compatible ;
- (iii) le rang de A est n (autrement dit ...

Méthode : pour déterminer si une famille est génératrice de \mathbb{R}^n , on peut

1. former la matrice des vecteurs en colonne ;
2. l'échelonner (pivot de Gauss) ;
3. compter le nombre de pivots : s'il y en a autant que de lignes, la famille est génératrice, sinon elle ne l'est pas.

IV. Exemples

Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices de leur espace ?

$$\mathbf{1.} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{2.} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$