

CALCULS TRIGONOMETRIQUES ET ÉQUATIONS AVEC DES COMPLEXES

🔍 **Exercice ou question basique à savoir refaire**

★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

🔍 Exercice 1.

1. Linéariser les expressions suivantes.
 $f(x) = \sin^5(x)$; $g(x) = \sin^3(x) \cos(x)$ et $h(x) = \cos^6(x)$.
2. Donner une primitive de f , g et h .

🔍 Exercice 2.

1. (a) Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(3x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
 (b) Résoudre $\sin(3x) = 8 \sin^3(x)$.
2. (a) Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
 ★ (b) Dans l'expression de $\cos(5x)$, en prenant $x = \frac{\pi}{10}$, déterminer une équation polynomiale de degré 5 vérifiée par $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 3.

1. En remarquant que $\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ik\frac{\pi}{3}}\right)$, réduire la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ où $n \geq 1$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

★ Exercice 4.

Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

★ Exercice 5.

Let z and z' be two complex numbers. We assume that they have the same absolute value. Prove that $\frac{(z+z')^2}{zz'}$ is a real number and is positive.

🔍 Exercice 6.

Résoudre : (a) $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$ (b) $z^2 = 5 + 12i$ (c) $z^2 = 2 - 2i$

Exercice 7.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- 🔍 (a) $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$ (b) $2z^2 - (1+9i)z - 7 + 11i = 0$ (c) $3z^4 + 17z^2 + 20 = 0$
 (d) $z^2 + 4iz - 7 - 4i = 0$ ★ (e) $z^6 + z^3 + 1 = 0$

(pour (c) on pourra commencer par factoriser $3Z^2 + 17Z + 20$)

Exercice 8.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^3 = i$ (b) $z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$ (c) $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ (d) $32 + iz^5 = 0$

Exercice 9.

Soit le polynôme défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis déterminer un polynôme Q tel que $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère formé par les images dans le plan complexe des quatre solutions trouvées ?