

# CALCULS TRIGONOMETRIQUES ET ÉQUATIONS AVEC DES COMPLEXES

## I. Utilisation des nombres complexes pour transformer des expressions trigonométriques

1)  $\cos^n(x)$ ,  $\sin^n(x)$  ou  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$

a. Linéariser :  $\cos^n(x)$  ou  $\sin^n(x) \rightsquigarrow \cos(kx)$  ou  $\sin(kx)$

**Intérêt** : par exemple trouver des primitives, ou des solutions particulières d'équations différentielles ...



**Méthode** : formule d'Euler, développement avec binôme de Newton, et formules d'Euler dans l'autre sens.

rappel formules d'Euler :  $\sin(\theta) = \dots\dots\dots$  et  $\cos(\theta) = \dots\dots\dots$

ou  $\dots\dots\dots$   $\dots\dots\dots$

rappel formule du binôme de Newton :  $(a + b)^n = \dots\dots\dots$

**Exemple** : linéariser  $\sin^4(x)$  et en déduire une primitive.

$$\sin^4(x) = \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4$$

$$= \dots$$



**Remarque** : on peut aussi linéariser des produits de puissances de cosinus ou sinus, dans ce cas, bien terminer le développement avant de réutiliser les formules d'Euler. voir exercice 1. fonction  $g$

**b. Dé-linéariser (factoriser) :**  $\cos(nx)$  **ou**  $\sin(nx) \rightsquigarrow \cos^k(x) \sin^l(x)$

**Intérêt :** factoriser des expressions, pour par exemple, résoudre une équation ou trouver le signe ...



**Méthode :** formule de Moivre, développement avec binôme de Newton, puis partie réelle ou imaginaire.

rappel formule de Moivre : ...

donc  $\cos(nx) = \dots\dots\dots$  et  $\sin(nx) = \dots\dots\dots$

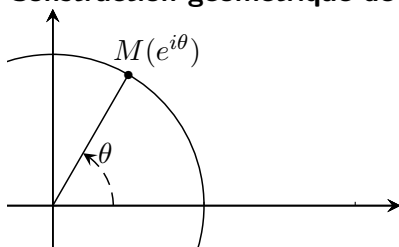
**Exemple :** dé-linéariser  $\cos(3x)$  puis résoudre l'équation  $\cos(3x) + 4\cos(x) = 0$ .

Avec la formule de Moivre :  $\cos(3x) = \operatorname{Re} \left( (\cos(x) + i\sin(x))^3 \right)$ .

Or  $(\cos(x) + i\sin(x))^3 = \dots\dots\dots$

## 2) Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$ et $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$

**Construction géométrique de  $1 + e^{i\theta}$  :**



**Calcul de  $1 + e^{i\theta}$  :**



**Généralisation au calcul de  $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$  :** on factorise par  $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ .

Par exemple  $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

**Application aux formules de trigonométrie :**  $\cos(p) + \cos(q) = \operatorname{Re}(e^{ip} + e^{iq})$  et  $\sin(p) + \sin(q) = \operatorname{Im}(e^{ip} + e^{iq})$ .

D'abord :  $e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left( \dots \right)$

## II. Équations remarquables dans $\mathbb{C}$

### 1) Polynômes de degré 2

**a. Résoudre  $z^2 = \omega$  avec  $\omega \in \mathbb{C}$**



Si  $\omega \neq 0$ , cette équation a toujours deux solutions dans  $\mathbb{C}$ , et elles sont opposées.

**Exemples et remarque :**

$$z^2 = -9 \dots\dots\dots$$

$$z^2 = 16 \dots\dots\dots$$

En fait il s'agit d'une généralisation de ce que l'on connaît déjà pour les réels strictement positifs :  $x^2 = 4$  a exactement deux solutions opposées.

**Méthode pour résoudre  $z^2 = \omega$  :**

- 1er cas : la forme exponentielle de  $\omega$  est simple :  $\omega = \rho e^{i\theta}$ .

Les solutions de l'équation  $z^2 = \rho e^{i\theta}$  sont  $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$  et  $-\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ .

- Sinon : on cherche  $z$  sous forme algébrique  $x + iy$ .

(i)  $z^2 = \dots$

on en déduit deux équations :  $\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$

(ii)  $|z^2| = |\omega|$ , donc ...

on calcule  $|\omega|$  et on en déduit une troisième équation.

- (iii) on résout le système en trouvant d'abord  $x^2$  (avec (1) et (3)), puis deux possibilités pour  $x$  et enfin, en utilisant (2), on trouve les deux possibilités associées pour  $y$ .

**Exemples** : résolvons  $z^2 = 9i$  et  $z^2 = 3 - 4i$ .



**b. Résoudre  $az^2 + bz + c = 0$  avec  $a, b$  et  $c$  complexes.**

Les mêmes calculs que dans  $\mathbb{R}$  sont valables, mais on ne peut pas utiliser la racine carrée !

**Méthode :** on calcule  $\Delta = \dots\dots\dots$  :

- ★ si  $\Delta = 0$ , l'équation a une unique solution  $z_0 = -\frac{b}{2a}$  ;
- ★ si  $\Delta \neq 0$ , l'équation a deux solutions  $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$  avec  $\delta$  tel que  $\delta^2 = \Delta$ .  
Pour trouver  $\delta$ , on utilise l'une des deux méthodes de la page précédente (et on prend l'une des deux solutions trouvées).

**Exemples :** résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations  $-z^2 + \sqrt{3}z - i = 0$  et  $z^2 + (-2 + 2i)z - 2i = 0$ .

**Remarque :** la forme factorisée est la même :

- ★ si  $\Delta = 0$  :  $az^2 + bz + c = \dots$
- ★ si  $\Delta \neq 0$  :  $az^2 + bz + c = \dots$

**2) Racines  $n$ -ièmes : équations  $z^n = \omega$** **a. Racines  $n$ -ièmes de l'unité : solutions de  $z^n = 1$** **Définition.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle **racine  $n$ -ième de l'unité** tout complexe  $z$  tel que  $z^n = 1$ .  
L'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité se note  $\mathbb{U}_n$ .

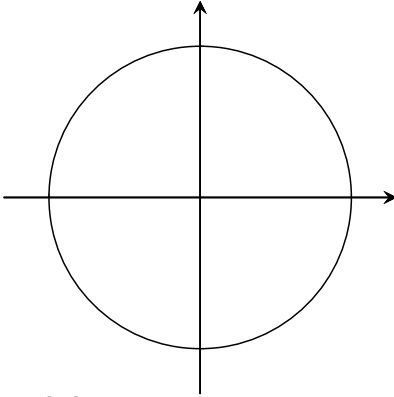
**Exemples :**  $\mathbb{U}_1 = \dots\dots\dots$  ;  $\mathbb{U}_2 = \dots$

**Théorème.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble des solutions de  $z^n = 1$  est :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{n}}; e^{\frac{4i\pi}{n}}; \dots; e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} \right\}$$

**Remarque :** il y a exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité distinctes.

**Propriété.**

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . La somme des racines  $n$ -ièmes de l'unité est nulle.

**Démonstration :**

**b. Racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe : solutions de  $z^n = \omega$**

**Théorème.**

L'équation  $z^n = \rho e^{i\theta}$  (où  $\rho > 0$ ) a  $n$  solutions.

Ce sont les  $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}$  pour  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ .

**Remarques :**

- on rappelle que  $\sqrt[n]{\rho}$  est l'antécédent positif de  $\rho$  par la fonction réelle  $x \mapsto x^n$ , autrement dit  $\sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$ .
- on peut aussi écrire l'ensemble de ces racines sous forme  $z_k = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  avec  $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$  et  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ .

**Exemple.** Résoudre  $z^4 = 81i$  et  $z^5 = -16 + 16i\sqrt{3}$ .