Développements limités.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

Rappeler la dérivée de $\arctan(x)$.
En déduire le développement limité à l'ordre 6 de $\arctan(x)$ en 0.

☞ Exercice 2.

Déterminer le DL à l'ordre 3 de $\sin(x)$ en $\frac{\pi}{4}$.
on pourra faire deux méthodes : application de la formule de Taylor-Young, ou changement de variable $h = x - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3.

Déterminer les DL suivants :

☞ **1.** DL_3 de $(\sqrt{1+x} - x)\cos(2x)$ en 0 ;

☞ **2.** DL_3 de $\sin(e^x)$ en 0 ;

☞ **3.** DL_2 en 0 de $\frac{\sin(x)}{e^x - 1}$;

4. DL_5 de $\sin^2(x)\ln(1+x^2)$ en 0 ;

5. DL_4 en 0 de $\ln(1+\cos(x))$;

6. DL_3 en 1 de $\frac{e^x}{x^2}$;

7. DL_3 en $\frac{\pi}{6}$ de $\frac{1}{\sin(x)}$;

Exercice 4.

En utilisant des DL, déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

☞ $f(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$ $\quad g(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$ $\quad h(x) = \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x^3}$ $\quad k(x) = \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{\sin(x)}$

Exercice 5.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\cos(x) - e^x}{x}$.

1. Déterminer un DL à l'ordre 2 de f en 0.

2. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On note $\overline{f}$ le prolongement.
Justifier que $\overline{f}$ est dérivable en 0 et déterminer la position relative entre la tangente et la courbe de f.

★ Exercice 6.

On considère la fonction $f(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
Prouver que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ donc on précisera une équation, et la position par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$.
On pourra utiliser un changement de variable $x = \frac{1}{h}$ et se ramener ainsi à un DL en 0.