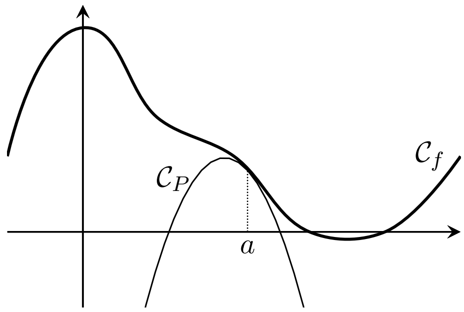
Développements limités



Rappel : $u(x) \underset{x\to a}{=} o(v(x))$ signifie :

L'objectif est d'approcher une fonction f par un polynôme P localement autour d'une abscisse a, et de mesurer la qualité de l'approximation.

I. Définition, existence et unicité

Définition.
On dit que f admet un ***développement limité d'ordre n en a*** si il existe des constantes c_0, $c_1 \dots c_n$ et une fonction ε définie au voisinage de a telles que :

$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Ou encore $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + o\Big((x-a)^n\Big)$.

- Le polynôme $c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots+c_n(x-a)^n$ est appelé ***partie régulière*** du développement limité.
- Le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ est appelé le ***reste d'ordre n***.

Notation : on pourra noter DL pour « développement limité ».

Remarques : • la notation $o\Big((x-a)^n\Big)$ est justifiée car ....

Remarque importante : on peut ramener tout développement limité à 0 en posant $h = x - a$, alors le développement limité de f en a s'écrit : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n + o(h^n)$.

1) Premiers exemples

- développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{1-x}$ en 0 : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

  En effet :

- $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ est le ....

  En effet,

2) Forme normalisée

Dans un développement limité, si les premiers coefficients sont nuls, on peut changer la forme.
Par exemple si le développement limité de f en a est $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} c_p h^p + c_{p+1}h^{p+1} + \ldots + c_m h^m + o(h^m)$, alors on note $f(a+h) = h^p\Big(c_p + c_{p+1}h + \ldots + c_m h^{m-p} + o\big(h^{m-p}\big)\Big)$,
que l'on peut renuméroter : $f(a+h) = h^p\big(a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o(h^n)\big)$: c'est la ***forme normalisée*** du développement limité.

3) Existence et unicité

Propriété.

Lorsque f admet un développement limité d'ordre n en a, les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont déterminés de manière unique.

Conséquence :

Si f est paire et admet un DL à l'ordre n en 0, alors les coefficients des puissances impaires son nuls.
Si f est impaire, alors les coefficients des puissances paires sont nuls.

En effet, on note $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Alors $f(-x) = \ldots$

....

....

• si f est paire, ...

....

• si f est impaire,

Théorème : formule de Taylor-Young.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle contenant a alors f admet un DL à l'ordre n en a donné par la formule :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

Ou alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \ldots$.

Remarque : f est continue en a si et seulement si elle admet en a un DL à l'ordre 0.
f est dérivable en a si et seulement si elle admet en a un DL à l'ordre 1.

On en déduit une première liste de DL en 0 pour les fonctions de référence :

• e^x :

• $\cos(x)$:

- $\sin(x)$:

- $(1+x)^\alpha$:

II. Opérations sur les développements limités

1) Troncature

Si $p < n$ alors en 0, « h^n tend plus vite vers 0 que h^p »: autrement dit, un DL à l'ordre p est moins précis qu'un DL à l'ordre n.

Propriété.

Si f admet en a un DL à l'ordre n, alors pour tout $p \leqslant n$, f admet en a un DL à l'ordre p, obtenu par ***troncature***, c'est-à-dire en supprimant tous les termes dont le degré est supérieur à p.

Exemple : si $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + o\big((x-a)^3\big)$,
alors $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big)$.
En effet, $c_3(x-a)^3 + o\big((x-a)^3\big) \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^2\big)$.

2) Combinaison linéaire et produit

Dans cette partie, on suppose que f et g admettent en a des DL <u>au même ordre n</u>, et on note P_f (respectivement P_g) la partie régulière du développement limité de f (respectivement g).

- **Somme :** $\boxed{f+g \text{ admet un DL à l'ordre } n \text{ et sa partie régulière est } P_f+P_g}$.

- **Combinaison linéaire :** $\boxed{f+\lambda g \text{ admet un DL à l'ordre } n \text{ et sa partie régulière est } P_f+\lambda P_g}$.

Exemple : DL à l'ordre 3 de $e^x - 2\cos(x)$ en 0 :

- **Produit :** $\boxed{fg \text{ admet un DL à l'ordre } n \text{ et sa partie régulière est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à } n \text{ dans } P_f \times P_g}$.

Exemple : DL à l'ordre 3 de $\cos(x)e^x$ en 0 :

3) Composition et quotient

• Composition : si f admet en 0 un DL à l'ordre n, et g admet en $f(0)$ un DL à l'ordre n, alors $g \circ f$ admet en 0 un DL à l'ordre n : sa partie régulière est constituée des termes de $P_g \circ P_f$ qui sont de degré inférieur ou égal à n.

Exemple et méthode : on cherche un DL à l'ordre 5 de $e^{\sin(x)}$ en 0 :

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \dots$

avec $u = \sin(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ donc $u \to 0$:

$e^u \underset{u\to 0}{=} \dots$

u		$\times 1$
u^2		$\times \dots$
u^3		
u^4		
u^5		

Méthode :
- on écrit le DL_n de f, et le DL_n de g en utilisant la variable u ;
- on identifie u à la partie régulière du DL de f et on calcule successivement les puissances du DL de f en ne gardant que les termes de degré inférieur à n ;
- on remplace ces puissances dans la formule du DL de g.

• Inverse : si f admet en a un DL à l'ordre n avec un premier coefficient non nul, alors $\frac{1}{f}$ a aussi un DL à l'ordre n que l'on obtient en utilisant la composition par $\frac{1}{1-x}$ (on factorise par a_0 si il n'est pas égal à 1).

Exemple : déterminons un DL à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$

- **Quotient :** $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$: on combine les méthodes de l'inverse et du produit.

Exemple : déterminons un DL à l'ordre 3 en 0 de $\tan(x)$:

Remarques :

- « $x \times o(x^n) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1})$ » et « $\frac{o(x^n)}{x} \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-1})$ »
- si le premier terme du DL du dénominateur est nul, on utilise la forme normalisée :
  $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^p} \times \frac{1}{a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+o(x^m)}$: pour obtenir un DL à l'ordre n à la fin, il faut travailler sur un DL à l'ordre $n+p$.

  voir exemple Exercice 3. 3.

4) Intégration terme à terme

Propriété.

On suppose que f admet un DL à l'ordre n en a, et on note F une primitive de f.
Alors F a un DL à l'ordre $n+1$ en a.
Plus précisément : si $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + o\Big((x-a)^n\Big)$,
alors $F(x) = F(a) + c_0(x-a) + \frac{1}{2}c_1(x-a)^2 + \frac{1}{3}c_2(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}c_n(x-a)^{n+1} + o\Big((x-a)^{n+1}\Big)$

Exemple : on va déterminer un DL à l'ordre $n+1$ de $\ln(1+x)$:
$x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

III. Utilisation

1) Calculs de limites, obtention d'équivalents

Propriété.

Si f admet un DL à l'ordre n en a, alors f est équivalente au premier terme non nul de son DL :
si $f(x) = c_p(x-a)^p + c_{p+1}(x-a)^{p+1} + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} c_p(x-a)^p$.

Exemples : • déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x(1-\cos(3x))}$.

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)}$:

2) Étude locale d'une courbe

Exemple : étude locale en 0 de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$:

3) Détermination d'asymptotes

Définition.

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (mx + p) = 0$.

Exemple de détermination d'asymptote en utilisant les développements limités :

On cherche à étudier en $+\infty$, la fonction f définie pour $x > 0$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$.
Pour $x > 0$, on pose $x = \frac{1}{h}$.

IV. Développements limités usuels à connaître

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

(en particulier $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient $\sqrt{1+x}$).