Pratiques calculatoires autour des fonctions

B - Dérivées et variations

I. Dériver des fonctions

1) Fonctions de référence

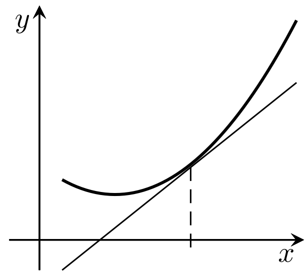
Expression de $f(x)$	Expression de $f'(x)$	Intervalle(s) de validité	Formules de composées associées
constante k	0	$\mathbb{R}$	
x	1	$\mathbb{R}$	
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\big(u(x)\big)^n$ a pour dérivée $nu'(x)\big(u(x)\big)^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{u(x)}$ a pour dérivée $-\dfrac{u'(x)}{\big(u(x)\big)^2}$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{\big(u(x)\big)^n}$ a pour dérivée $-\dfrac{nu'(x)}{\big(u(x)\big)^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$\sqrt{u(x)}$ a pour dérivée $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$	$\ln(u(x))$ a pour dérivée $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$e^{u(x)}$ a pour dérivée $u'(x)e^{u(x)}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(u(x))$ a pour dérivée $-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(u(x))$ a pour dérivée $u'(x)\cos(u(x))$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	

2) Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur des ensembles $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$.

- ⋆ Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λu est dérivable sur $\mathcal{D}_u$ et $\boxed{(\lambda u)' = \lambda u'}$.
- ⋆ La fonction $u+v$ est dérivable sur $\mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v$ et $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$.
- ⋆ La fonction $u \times v$ est dérivable sur $\mathcal{D}_u \cap D_v$ et $\boxed{(u \times v)' = u'v + uv'}$.
- ⋆ La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_u \cap \{x \in \mathcal{D}_v \,|\, v(x) \neq 0\}$ et $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$.
- ⋆ La fonction $v \circ u$ est dérivable sur $\{x \in \mathcal{D}_u \,|\, u(x) \in \mathcal{D}_v\}$ et $\boxed{(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'}$.

II. Utilisation de la dérivation pour l'étude des variations



$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en 2.
Une équation de la tangente à la courbe de f en 2 est $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

On rappelle qu'une droite est croissante lorsque son coefficient directeur est positif, et décroissante lorsque le coefficient directeur est négatif. Ainsi :

f est croissante sur un <u>intervalle</u> I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
f est décroissante sur un <u>intervalle</u> I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

Exemples : $f(x) = \dfrac{1}{3x-4}$