Logarithme, exponentielle, puissances.

Exercice 1. Démonstration de formules fondamentales pour ln.

On cherche ici à démontrer les deux formules du cours $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ pour tous a et b strictement positifs.

1. Soient a un réel strictement positif fixé, et f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax)$.

- **(a)** Calculer $f'(x)$, et $f(1)$.
- **(b)** En déduire que pour tout x strictement positif, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

2. En utilisant la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, désormais acquise pour tous a et b strictement positifs, démontrer : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, comparer (sans calculatrice) les nombres A et B :

1. $A = \ln(25)$ et $B = 2\ln(5)$

2. $A = 4\ln(2)$ et $B = \ln(64)$

3. $A = 2\ln(5)$ et $B = \ln(9)$

4. $A = 4\ln(27)$ et $B = 2\ln(81)$

Exercice 3.

1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants :
$\ln(16)$; $5\ln(32) - 6\ln\left(\sqrt{2}\right)$; $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - 4\ln\left(\frac{1}{8}\right)$; $\ln(72) - 2\ln(3)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{255} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

2. Simplifier : $\ln\left(\frac{e^5}{5}\right) + \ln(5)$; $2\ln(7) - \ln\left(\frac{49}{e^3}\right)$; $\ln\left(\frac{e^5}{e^3}\right)$; $\ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

* **4.** Montrer que $\frac{7}{16}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2} - 1) = 0$.

Exercice 4.

Étudier les fonctions suivantes :
$f : x \mapsto x^2 + 2\ln(x)$; $g : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; $h : x \mapsto -x + 5 + \ln(|1 - x|)$; $k : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

Exercice 5. Démonstration de formules avec exponentielle.

On cherche ici à démontrer les formules du cours $e^{a+b} = e^a e^b$ et $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, en n'utilisant que la définition de l'exponentielle, et les formules et propriétés de ln.

1. Calculer $\ln(\exp(a + b))$ et $\ln(\exp(a) \times \exp(b))$. Que peut-on conclure ?

2. Par la même méthode, prouver que $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Exercice 6.

Écrire sous la forme la plus simple possible les nombres (ou expressions) suivant(e)s :

$A = e^{\ln(3)} + \ln(e^4)$

$B = e^{\frac{1}{2}\ln(9)}$

$C = 3\ln(e^2) - e^{\ln(5)}$

$D = 3\ln(e^{-3}) + \frac{1}{2}\ln(e^{10})$

$E = e^{4\ln(1/3)}$

$F = e^{\frac{\ln(5)}{2}}$

$G = \ln(e^{-1})$

$H = e^{1-2\ln(2)}$

$I = \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right)$

$J = e^{-2\ln(5)}e^{2\ln(5)}$

$K(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

Exercice 7.

Étudier les fonctions suivantes :
$f(x) = e^{-3x+4}$; $g(x) = \frac{1}{-3e^x+4}$; $h(x) = e^{x^2}$; $k(x) = (7x + 4)e^{-x}$.

Exercice 8.

Résoudre les équations et inéquations suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition :

(a) $\ln(x) + \ln(x - 1) = 0$

(b) $e^{2x} = 7$

(c) $5e^{2x} \geqslant e^{-x}$

(d) $\ln(2x) \leqslant 10$

(e) $e^x = -2$

(f) $e^{-x} = \frac{1}{9}$

Exercice 9.

1. Résoudre l'équation $X^2 - 4X - 5 = 0$.

2. En déduire la résolution des équations suivantes :

(a) $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$

(b) $(\ln(x))^2 - 4\ln(x) - 5 = 0$

(c) $e^x - 4 = 5e^{-x}$

(d) $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln(2)$

Exercice 10.

Résoudre dans $]0,+\infty[$ les équations suivantes : **(a)** $x^2 = x^x$ **(b)** $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

Exercice 11. puissances non entières

1. a est un nombre strictement positif.
Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une puissance de a :
$a^{0,3}a^{-1,2}$; $(a^{-6})^{\frac{1}{3}}$; $(\sqrt{a})^4$; $a^{-0,6}a^{0,6}$; $\dfrac{a^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{10}}}$.

2. Simplifier les expressions suivantes : $3^{3,2} \times 3^{0,8}$; $(0,5^{2,1})^2$; $\dfrac{7,3^{1,5}}{7,3^{0,5}}$; $\dfrac{6^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}$.

Exercice 12.

Un café est à l'instant 0 à la température de 100°, dans une pièce à 20°.
Les lois de la physique permettent de montrer qu'il existe un facteur k tel que la température f évolue en fonction du temps t (strictement positif, mesuré en minutes) de la façon suivante : $f(t) = 80e^{-kt} + 20$.

1. On a mesuré qu'au bout de 20 minutes, il était à la température de 60°.
En déduire le coefficient k.

2. Quelle sera la température du café si on le laisse une demi-heure ?

3. Au bout de combien de temps la température sera-t-elle de 30° ?

Exercice 13.

Déterminer les limites suivantes :

1. $f(x) = \ln(-3x+7)$ en $-\infty$, 0 et $\frac{7}{3}^-$

2. $g(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$ en 0^+ et $+\infty$

3. $h(x) = \ln(x) - x + e^x$ en $+\infty$

4. $k(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$ en 0^+, en 1 et $+\infty$

5. $\ell(x) = (3x^2+1)e^x$ en $-\infty$ et $+\infty$

6. $m(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ et en $+\infty$

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^x$.
Construire le tableau des variations complet de f, avec limites aux bords et extremum.
Déterminer une équation de la tangente en $x = 1$.

Exercice 15.

Soit $a > 0$.

1. Étudier la fonction $f_a : x \mapsto a^x$ (on pourra étudier différents cas).

2. Montrer que si $a \neq 1$, la fonction f_a est bijective et déterminer sa fonction réciproque.

Remarque : $x \mapsto a^x$ est appelée exponentielle en base a. Sa réciproque est appelée logarithme en base a et est notée $\log_a$.

En particulier, on utilise souvent le logarithme en base 10, noté $\log$ pour $\log_{10}$: $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Et la fonction logarithme népérien est le logarithme en base e : $\ln = \log_e$.