Équations différentielles.

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes :

(a) $y' + 4xy = 0$ sur $\mathbb{R}$;
(b) $y' - xe^{x^2}y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
(c) $(1+x^2)y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
(d) $y' - \frac{y}{1+x} = 0$ sur $[0; +\infty[$;
(e) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 0$ sur $\mathbb{R}$;
(f) $y' + \sin(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes.

(a) $y' + 3y = 1 + x^2 + 2xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$;
(b) $y' - y\tan(x) = \sin(2x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
(c) $y' - 2y = \cos(x) + xe^{2x}$ sur $\mathbb{R}$;
(d) $y' - 2y = e^{(1+2i)x}$ sur $\mathbb{R}$;
(e) $(1+x^2)z' + 2xz = 1$ sur $\mathbb{R}$;
(f) $xy' - (1+2x)y = -x^2e^x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3.

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

(a) $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ y' - \dfrac{y}{1+x^2} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ x' + 2tx = t \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 4.

1. Calculer la dérivée de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.

Le 11 mars 2011, suite à un important séisme, trois des six réacteurs de la centrale nucléaire de Fukushima ont subi des fusions partielles de cœur et toutes les piscines d'entreposage des éléments nucléaires irradiés ont subi un défaut de refroidissement. Des rejets dans l'atmosphère ont disséminé des éléments radioactifs importants sur le plan sanitaire tels que l'iode 131 et le césium 137.

1. La « vitesse de désintégration » d'un corps radioactif, c'est-à-dire le nombre de noyaux qui se désintègrent à un instant t, est proportionnelle au nombre de noyaux $N(t)$ présent à l'instant t. On peut donc écrire $N'(t) = -\lambda N(t)$ où λ est le facteur de proportionnalité, qui est une constante caractéristique de la matière considérée, et t sera le temps en années.
Résoudre l'équation différentielle avec pour condition initiale $N(0) = N_0$.

2. La radioactivité se mesure par l'« activité » du corps, qui est le nombre de désintégrations par unité de temps. L'unité est le Becquerel (Bq).
L'activité A est donc définie par $A(t) = -N'(t)$. Exprimer $A(t)$.

3. La demi-vie est le temps mis par une substance radioactive pour perdre la moitié de son activité. Le césium 137 a pour demi-vie 30,15 ans.

(a) Calculer sa constante radioactive λ.

(b) Le 22 mars 2011, l'IRSN (institut de radioprotection et de sécurité nucléaire) avait relevé une activité radioactive A du césium 137 de $6 \times 10^{15} Bq$. Évaluer cette activité le 11 mars 2018 dans la centrale de Fukushima.

4. La contamination des sols et de l'air est principalement due à cet élément.
À partir de quelle année la centrale pourrait-elle avoir une activité inférieure à $37kBq$, limite inférieure à la contamination selon l'UNSCEAR (United Nations Scientific Committee on the Effects of Atomic Radiation) ?

Exercice 6. Suite de l'introduction du cours.

Pour la chute d'un corps dans l'introduction, nous avions établi que la vitesse v était solution de l'équation différentielle $mv'+kv=-mg$ avec m la masse de l'objet, et k une constante, caractéristique du frottement de l'objet avec l'air.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $v(0)=0$ (on considère que l'on lâche simplement l'objet au départ).

2. Déterminer la limite de v lorsque t tend vers $+\infty$.

3. On peut montrer que, pour une densité donnée, le rapport $\frac{k}{m}$ est inversement proportionnel à la taille de l'objet.
Qui tombe le plus vite : un copeau de bois ou une bûche du même bois ?

* Exercice 7.

On considère l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ où l'inconnue est f, une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction nulle et les fonctions de la forme $x\mapsto e^{ax}$ où $a\in\mathbb{R}$ sont des solutions de cette équation.

2. Réciproquement, soit f une fonction qui vérifie l'équation et n'est pas la fonction nulle.

- **(a)** Montrer que $f(0)=1$.
- **(b)** Montrer qu'il existe α dans $\mathbb{R}$ tel que f est une solution de l'équation différentielle $y'-\alpha y=0$.
- **(c)** Conclure sur la forme de la fonction f.

* Exercice 8.

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'-2xy+2xy^2=0$.
On suppose qu'à part la fonction nulle, les autres solutions ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.

1. Si y est une solution de $(\mathcal{E})$, montrer que $u=\frac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle linéaire, que l'on notera $(\mathcal{F})$.

2. Résoudre $(\mathcal{F})$ et en déduire les solutions $(\mathcal{E})$.

Exercice 9.

Résoudre les équations suivantes en recherchant les solutions dans les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(a) $y''-5y'+6y=0$ **(b)** $y''-3y'=0$ **(c)** $4y''+4y'+y=0$

Exercice 10.

Résoudre les équations différentielles suivantes (déterminer les solutions à valeurs complexes puis à valeurs réelles).

- **(a)** $y''-2y'+5y=2e^{2x}$
- **(b)** $y''+2y'+y=e^{3x}$
- **(c)** $y''+2y'+y=3e^{-x}$
- **(d)** $y''+2y'-2y=\frac{1}{2}e^{-x}$
- **(e)** $y''+y=0$
  puis $y''+y=e^{2it}$ (uniquement dans $\mathbb{C}$)

Exercice 11.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+9y=0$.

2. **(a)** Montrer que la fonction f définie par $f(x)=-\frac{1}{10}\cos(2x)$ est une solution de l'équation $y''+9y=-\frac{1}{2}\cos(2x)$.

- **(b)** Montrer que $\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y''+9y=\sin^2(x)$.