Nombres complexes
A - Généralités

On rappelle que i désigne un nombre tel que $\boxed{i^2 = -1}$.
Ce nombre n'est pas un nombre réel, car l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle. Cela explique la notation i comme « imaginaire ».

La première apparition d'une « racine carrée de nombre négatif » semble se situer au 16ème siècle, dans les travaux de Cardan (1501-1576). Bien que ces nombres soient impossibles à concevoir dans l'univers réel, il était possible de les manipuler dans des calculs, sans aucune contradiction avec les règles usuelles. C'est Descartes (1596 - 1650) qui leur donne leur appellation d'« imaginaires » en 1637. Après plusieurs siècles de manipulation de l'écriture inconfortable $\sqrt{-1}$, Euler introduit finalement la notation « i », popularisée par Gauss (1777 - 1855). Au 19ème siècle, Fresnel (1788 - 1827) et Kennelly (1861 - 1939) montrent l'utilité des nombres complexes pour résoudre des problèmes de physique (optique, électricité).

I. Nombres complexes : forme algébrique

Définition.
Un ***nombre complexe*** est un nombre z qui s'écrit sous la forme $z = a + ib$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{C}$ est l'ensemble de tous les nombres complexes que l'on peut former lorsque a et b décrivent $\mathbb{R}$.

Théorème.
Pour tous a et b de $\mathbb{R}$, et tous a' et b' de $\mathbb{R}$:

$$a + ib = a' + ib' \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Autrement dit, pour tout nombre complexe z, le couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$ est unique, on peut donc donner la définition suivante :

Définition.
Dans l'écriture $z = a + ib$, a est appelée ***partie réelle***, on note $a = \mathrm{Re}\,(z)$
b est la ***partie imaginaire*** : $b = \mathrm{Im}\,(z)$.
La forme $z = a + ib$ est la ***forme algébrique***.

Cas particuliers :
si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$ et il est qualifié d'***imaginaire pur*** : l'ensemble des nombres imaginaires purs se note parfois $i\mathbb{R}$.
si $b = 0$, alors le nombre est réel (par exemple : $7 + 0i = 7$), ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1) Calculs avec les nombres complexes

Les opérations sur les nombres réels (addition, soustraction, multiplication, division par un nombre non nul) restent valables dans $\mathbb{C}$, avec les mêmes propriétés de priorité, commutativité, associativité et distributivité que dans $\mathbb{R}$. La règle du produit nul reste également valable.
Le résultat d'une de ces opérations peut toujours se mettre sous forme algébrique $a + ib$.

Par exemple, $3 - 2i + 5 + 12i =$ .... et $(3 - 2i)(5 + 12i) =$ ....
$= \dots$

Notation : attention, lors de l'utilisation en physique, on note parfois j au lieu de i (pour éviter la confusion avec l'intensité).
Dans le cours de maths, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce nombre particulier est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

En effet : ....

a. conjugué

Définition.

On appelle ***conjugué*** d'un nombre complexe $z = a+ib$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ (« z barre ») défini par $\overline{z} = a - ib$.

Exemples : $z_1 = 3+4i$ $\quad z_2 = -2 + \frac{i}{2}$ $\quad z_3 = 5i - 11$ $\quad z_4 = \pi - 2i$

$\overline{z_1} =$ $\quad \overline{z_2} =$ $\quad \overline{z_3} =$ $\quad \overline{z_4} =$

$\overline{z_1 + z_3} =$ $\quad \overline{z_1 \times z_2} =$ $\quad \overline{z_1} \times \overline{z_2} =$

Propriété.

Soient z et z' deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$, alors :
$\overline{(\overline{z})} = \ldots$; $\overline{z+z'} = \ldots\ldots\ldots$; $\overline{z \times z'} = \ldots\ldots$; $\overline{z^n} = \ldots\ldots$ et pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \ldots\ldots$

Remarque : $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ se lit « ....

Propriété.

Soit $z = a+ib$, alors $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.

En effet, ...

Propriété.

Soit $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

$z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\overline{z}$.

En effet,

b. module

Définition.

Soit $z = a+ib$, on appelle ***module de*** z et on note $|z|$ le nombre réel $\sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple : $\left|\frac{3}{2} - i\right| = \ldots$

Propriété.

Soient z et z' deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$, alors : $|z| = 0$ est équivalent à $z = 0$.
Et $|z|^2 = z\overline{z}$; $|\overline{z}| = |-z| = |z|$
$|zz'| = |z||z'|$; $|z^n| = |z|^n$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Remarque : le fait que le module soit un nombre réel permet d'arranger des calculs, notamment des quotients : $\dfrac{a+ib}{a'+ib'} =$ ....

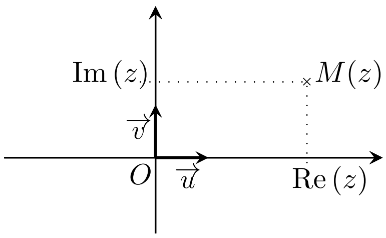
2) Plan complexe

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

a. Points.

Définition.

À tout nombre complexe z sous forme algébrique $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées (a, b) dans $\mathcal{R}$. M est le ***point image*** de z dans le plan, et est noté $M(z)$.
Réciproquement, à tout point $M(a, b)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = a + ib$.
z est l'***affixe*** du point M.



Propriété.

Soit M un point d'affixe z, alors $|z| = OM$.

En effet,

Remarques :

- Un plan où l'on représente des nombres complexes est appelé ***plan complexe***.
- À chaque nombre complexe correspond un unique point du plan, et à chaque point du plan correspond un unique nombre complexe.
  On dit alors qu'il y a une « bijection » entre $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$: $z \in \mathbb{R}$ signifie .... ; et $z \in i\mathbb{R}$ signifie ....
- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont ....
- .... est l'affixe du milieu du segment $[AB]$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.

b. Vecteurs.

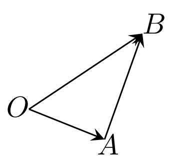
On peut aussi associer un nombre complexe à un vecteur : $z = a + ib$ correspond au vecteur $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.
Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ (avec z_A et z_B les affixes respectives des points A et B).
  Ainsi, $\boxed{|z_B - z_A| \text{ est } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$.
- Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs d'affixes z_1 et z_2 :
  - ⋆ $\lambda\overrightarrow{v_1}$ aura pour affixe λz_1 ;
  - ⋆ $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ aura pour affixe $z_1 + z_2$;
  - ⋆ $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires si et seulement si $z_2 = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = \lambda z_2$.

Propriété. Inégalité triangulaire.

Pour tous z et z' de $\mathcal{C}$, $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Justification : « le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite ».



Soient A et B les points du plan complexe d'affixes respectives z et $z + z'$.

Dans le triangle OAB :

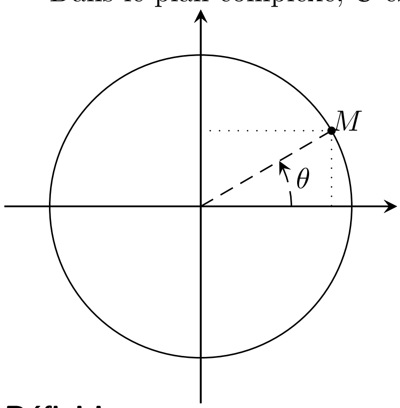
II. Nombres complexes : forme trigonométrique

1) Nombres complexes de module 1

Définition.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ est l'ensemble des points du cercle de centre O et de rayon 1.



Soit $M \in \mathbb{U}$, pour repérer M, il suffit d'avoir l'angle θ.

On appelle z l'affixe de M, alors $z =$ . . . .

θ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.
On dit que θ est un ***argument*** de z, noté $\arg(z)$.
Et tous les nombres $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ sont aussi des mesures de cet angle. Ainsi, θ est défini à 2π près.

Définition.

Soit θ dans $\mathbb{R}$. On note $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$. Ce nombre complexe est appelé ***exponentielle de*** $i\theta$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}}$.

Théorème : relation fondamentale de l'exponentielle complexe.

Pour tous α et β de $\mathbb{R}$:

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

Démonstration avec les formules de trigonométrie. Ce théorème est admis ici.

Propriété.

Pour tous réels θ, θ' et tout entier naturel n :

- $|e^{i\theta}| = 1 \quad ; \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} \quad ; \quad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (***formules d'Euler***)
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ soit $\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (***formule de Moivre***)

Preuves :

2) Argument et forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul, on note $\rho = |z|$, alors $\rho \neq 0$ et $\frac{z}{\rho}$ est de module 1 (en effet, ...)
Donc il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{\rho} = e^{i\theta}$, soit $z = \rho e^{i\theta}$. ρ est la lettre grecque *rho*
On en déduit le théorème suivant :

Théorème.

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme

$$z = \rho e^{i\theta} \qquad \text{avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

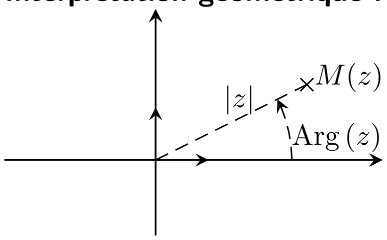
ρ est unique, c'est le module de z
θ est unique à 2π près, il est appelé ***argument*** de z, noté $\arg z$.

Définition.

L'écriture $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ est la ***forme trigonométrique*** de z.

Remarque : l'argument est donné à 2π près, et pour le signifier, on notera (2π) à la fin d'une égalité avec des arguments (« modulo 2π »).
Par exemple, si $z = 3 + 3i$, $\mathrm{Arg}\,(z) =$ ....
On parlera d'***argument principal*** lorsque la mesure de l'angle sera donnée dans $]-\pi, \pi]$. Cet argument principal est, lui, unique pour un nombre complexe donné.

Interprétation géométrique :



Définition.

Soit M un point du plan complexe, d'affixe $z \neq 0$.
Le ***couple de coordonnées polaires*** de M est (ρ, θ) avec $\rho = |z|$ et $\theta = \mathrm{Arg}\,(z)\,(2\pi)$.

Méthode pour les changements de forme :

– Obtenir la forme algébrique : $a = \dots$. ; $b = \dots$

– Obtenir la forme trigonométrique : $\rho =$ .... ; déterminer θ tel que $\cos(\theta) =$ .... et $\sin(\theta) =$ ....

Exemples : écrire les formes algébriques de $z_1 = 3e^{i\pi}$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, et les formes trigonométriques de $z_3 = 1 - i$ et $z_4 = -2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Attention : une forme $\rho e^{i\theta}$ n'est une forme trigonométrique que si $\rho > 0$!!

Propriété.

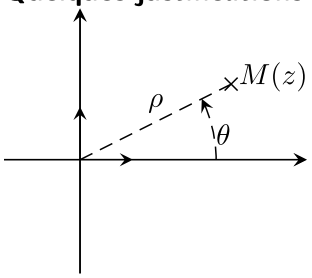
Soient z et z' deux complexes non nuls, alors :
$\text{Arg}(z) =$ .... si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ et $\text{Arg}(z) =$ .... si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$

$\text{Arg}(\overline{z}) =$ .....

$\text{Arg}(zz') =$ .... ; $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) =$ .... ; $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) =$ ....

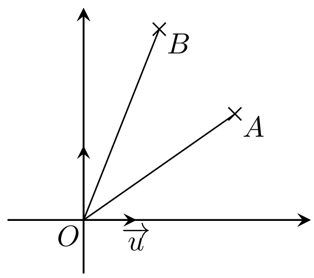
Et pour $n \in \mathbb{Z}$, $\text{Arg}(z^n) =$ ....

Quelques justifications :



Remarque : ces règles de calcul sur l'argument et celles sur le module permettent dans certains cas d'obtenir la forme trigonométrique d'un complexe sans passer par la forme algébrique.
Par exemple, $z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$.

3) Angles dans le plan complexe



Soient A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe.

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) =$ ....

$=$ ....

De même, $\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{ ....}}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) =$ ....

Conséquence : les points A, B et C sont alignés lorsque ....

III. Fonction exponentielle complexe

Définition.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe en notation algébrique.
On définit l'***exponentielle complexe*** de z par $e^z = e^a e^{ib}$ (on note aussi $\exp(z)$).

Alors $|e^z| =$ .... ; $\text{Arg}(e^z) =$ .... et $\text{Re}(e^z) =$ .... ; $\text{Im}(e^z) =$ ....

Ainsi, $\boxed{e^z = e^{z'} \text{ si et seulement si } \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z')\ (2\pi)}$.

Et les règles de calcul habituelles de l'exponentielle fonctionnent aussi avec l'exponentielle complexe :
$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$; $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$; $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$ et pour tout n de $\mathbb{Z}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
De plus, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Exercice : résoudre $e^z = 2\sqrt{3} + 2i$.