Devoir Surveillé n°5

Samedi 22 mars, 8h - 12h

Calculatrice interdite.

Le sujet compte 6 exercices répartis en deux pages et une annexe.
L'annexe est à compléter et rendre avec la copie.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

On définit $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

1. On note $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.
Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f et donner ses variations.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. Calculer u_1 et u_2.
La suite (u_n) est-elle monotone ?

4. **(a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_{n+1} - u_n|$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{2}{3 \times 4^n}$.

5. **(a)** Montrer par récurrence que (u_{2n}) est décroissante.

(b) En déduire que (u_{2n}) est croissante.

6. Justifier que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (u_n) converge.
On notera ℓ sa limite.

7. Montrer que $\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$ et déterminer ℓ.

Exercice 2.

1. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

(a) Montrer que l'ensemble des points vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ est une sphère $\mathcal{S}$ dont on précisera le centre Ω et le rayon.

(b) La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(3, 6, -1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.
Déterminer la distance de Ω à $\mathcal{D}$.
En déduire la nature de l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$.

2. Calculer les limites de : **(a)** $u_n = -2n^3 + 11n^2 - 3n + 1$ **(b)** $v_n = \dfrac{e^n - 2^n}{\ln(n) - 2n + 3}$

3. Résoudre : **(a)** $z^3 = 27i$ (dans $\mathbb{C}$) **(b)** $2\ln(1+x) + \ln(x-1) = 3\ln(x)$ (préciser l'ensemble de définition)

Exercice 3.

Une boîte contient 3 boules jaunes, 2 boules vertes, et n boules rouges (n est un entier positif quelconque). Les boules sont indiscernables au toucher, et l'expérience consiste à tirer simultanément deux boules de la boîte.

1. Justifier avec rigueur que $\text{Card}(\Omega) = \dfrac{(n+5)(n+4)}{2}$.

2. On note A l'événement : « les deux boules sont rouges ».
Exprimer $\mathbf{P}(A)$ en fonction de n.
Décrire $\overline{A}$ par une phrase.

3. On note B l'événement « obtenir 2 boules jaunes » et C : « obtenir deux boules vertes ».
Calculer les probabilités de ces deux événements.
À partir de combien de boules rouges est-ce que la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 4.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On note $(\omega_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ les racines n-ièmes de 1, et on note $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |w_k - 1|^2$.

1. Montrer que $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$.

2. Calculer alors S.

Exercice 5.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ ainsi que la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que $AP = PT$.

(b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^nP = PT^n$.

3. On pose $B = T - \frac{1}{2}I$.

(a) Donner les quatre coefficients de B puis calculer B^2.
En déduire B^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

(b) En déduire une formule pour T^n avec $n \geqslant 1$ et donner ses quatre coefficients.

4. **(a)** Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

(b) Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de A^n.

5. En utilisant **1.**, justifier alors que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3n+1}{2^n}$.

Nom - Prénom :

Exercice 6. aucune justification demandée ici

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on note $B = \{|x|\,,\ x \in A\}$.

(a) Si A est majorée, alors B possède une borne supérieure .... ☐ Vrai ☐ Faux

(b) 0 est la borne inférieure de B .... ☐ Vrai ☐ Faux

(c) Si A est un intervalle, alors B est un intervalle .... ☐ Vrai ☐ Faux

(d) Si B est un intervalle, alors A est un intervalle .... ☐ Vrai ☐ Faux

(e) A est bornée si et seulement si B est majorée .... ☐ Vrai ☐ Faux

2. Soit a un réel et ε un réel strictement positif.

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < |a - \varepsilon|\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leqslant \varepsilon\} = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \geqslant \varepsilon\} = [a - \varepsilon, +\infty[$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

3. Soient x et y des réels quelconques.

(a) Si $x < y$, alors $x^2 < y^2$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

(b) Si $x < y$, alors $1 - x > 1 - y$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

(c) Si $x < y$, alors $x^2 < xy$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

(d) $xy > 0 \iff x > 0$ et $y > 0$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

4. Compléter le tableau suivant avec une valeur dans chaque case, ou une croix si la valeur n'existe pas.

	majorant	maximum	borne sup.	minorant	minimum	borne inf.
$\{\sin(x),\ x \in]0, \pi[\}$						
$\left\{\dfrac{x^3}{x^3 - 1},\ x \in]0, 1[\right\}$						
$[6; 47[\cup \{2\} \cup [100, +\infty[$						
$\left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$						
$\left\{x + \dfrac{1}{x},\ x \in]0, +\infty[\right\}$						