Corrigé du DS n°5

Correction 2.

1. (a) L'équation est définie si et seulement si $1+x>0$, $x-1>0$ et $x>0$.
Donc $\boxed{\mathcal{D}=]1;+\infty[}$.

$$\begin{aligned}2\ln(1+x)+\ln(x-1)=3\ln(x) &\iff \ln\left((1+x)^2(x-1)\right)=\ln(x^3)\\ &\iff (1+x)^2(x-1)=x^3\\ &\iff (1+2x+x^2)(x-1)=x^3\\ &\iff x+2x^2+x^3-1-2x-x^2=x^3\\ &\iff x^2-x-1=0\end{aligned}$$

On résout : $\Delta=5$ donc $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\notin\mathcal{D}$ ou $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\in\mathcal{D}$.

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$

(b) $x^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}\ln(x)}$ et x^3 est défini sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\mathcal{D}=]0;+\infty[}$ et :

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}}=x^3 &\iff \ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)=\ln(x^3) \qquad \text{car ln est une bijection et les deux membres sont strictement posit}\\ &\iff \sqrt{x}\ln(x)=3\ln(x)\\ &\iff (\sqrt{x}-3)\ln(x)=0\\ &\iff \sqrt{x}-3=0 \text{ ou } \ln(x)=0\\ &\iff x=9 \text{ ou } x=1\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S=\left\{1;9\right\}}$.

2. (a)
$$\begin{aligned}z^3=-4\sqrt{3}+4i &\iff z^3=8e^{i\frac{5\pi}{6}}\\ &\iff z=2e^{i\frac{5\pi}{18}} \text{ ou } z=2e^{i\frac{5\pi}{18}+i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } z=2e^{i\frac{5\pi}{18}+i\frac{4\pi}{3}}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{2e^{i\frac{5\pi}{18}};2e^{i\frac{17\pi}{18}};2e^{i\frac{29\pi}{18}}\right\}}$.

(b) On cherche z sous forme $x+iy$.

Alors $z^2=-\frac{15}{4}+2i \iff \begin{cases} x^2-y^2=-\frac{15}{4} & (1)\\ 2xy=2 & (2)\end{cases}$

De plus, $|z^2|=\left|-\frac{15}{4}+2i\right|$ donc $x^2+y^2=\sqrt{\left(-\frac{15}{4}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{289}{16}}=\frac{17}{4}$ (3).

Donc en ajoutant (1) et (3) on a $2x^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ donc $x^2=\frac{1}{4}$ donc $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{2}$.

Pour $x=\frac{1}{2}$, dans (2), $y=2$ et pour $x=-\frac{1}{2}$, $y=-2$.

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}+2i;-\frac{1}{2}-2i\right\}}$.

Correction 3.

1.
$$\begin{aligned}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+2i\left(z+\frac{1}{z}\right)-1 &= z^2+2+\frac{1}{z^2}+2iz+\frac{2i}{z}-1\\ &=\frac{z^4+2z^2+1+2iz^3+2iz-z^2}{z^2}\\ &=\frac{z^4+2iz^3+z^2+2iz+1}{z^2}\end{aligned}$$
donc <u>l'égalité est vraie</u>.

2. $\Delta=-4+4=0$ donc il y a une unique solution : $Z=\dfrac{-2i}{2}=-i$: $\boxed{\mathcal{S}=\{-i\}}$.

3. On remarque que 0 n'est pas solution de $(\mathcal{E})$.

On a donc :
$$\begin{aligned}(\mathcal{E}) &\iff \frac{z^4+2iz^3+z^2+2iz+1}{z^2}=0\\ &\iff \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+2i\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc}\quad (\mathcal{E}) &\iff z+\frac{1}{z}=-i \quad \text{d'après la question précédente}\\ &\iff z^2+1=-iz\\ &\iff z^2+iz+1=0\end{aligned}$$

Pour cette équation, $\Delta=-1-4=-5$ donc on peut prendre $\delta=\sqrt{5}i$

Donc $z=\dfrac{-i-\sqrt{5}i}{2}$ ou $z=\dfrac{-i+\sqrt{5}i}{2}$.

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}i\ ;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}i\right\}}$.

Correction 4.

1. On note A la matrice des vecteurs en colonne :

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&2&2\\-1&1&-5\\3&0&2\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&1\\0&-4&0\\0&4&-4\\0&-9&-1\end{pmatrix} \quad L_2\leftarrow L_2-2L_1 \quad L_3\leftarrow L_3+L_1 \quad L_4\leftarrow L_4-3L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&0\\0&1&-1\\0&-9&-1\end{pmatrix} \quad L_2\leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \quad L_3\leftarrow \frac{1}{4}L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&0\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad L_3\leftarrow L_3-L_2 \quad L_4\leftarrow L_4+9L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad L_4\leftarrow L_4-L_3$$

$\mathrm{rg}(A)=3$ et il y a 3 vecteurs donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$.

Mais la matrice a 4 lignes, donc $\boxed{\text{la famille n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^4}$.

2. On note A_m la matrice des vecteurs en colonne :

$$A=\begin{pmatrix}1&m+1\\m+1&m+4\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1&m+1\\0&m+4-(m+1)^2\end{pmatrix} \quad L_2\leftarrow L_2-(m+1)L_1$$

Le rang est égal à 2 si et seulement si $m+4-(m+1)^2\neq 0 \iff -m^2-m+3\neq 0$.

$\Delta=13,\ m_1=\frac{1+\sqrt{13}}{-2},\ m_2=\frac{1-\sqrt{13}}{-2}$.

Donc si $m\notin\{m_1,m_2\}$, la matrice est de rang 2 et a 2 colonnes donc la famille est libre, et la matrice a 2 lignes donc la famille est génératrice de $\mathbb{R}^2$. Sinon, la famille n'est ni libre, ni génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Correction 5.

1. $M^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $M^3=\mathbf{0}_3$.

Si M était inversible, alors $M^{-1}M^3=M^{-1}\mathbf{0}_3$ c'est-à-dire $M^2=\mathbf{0}_3$ ce qui est exclu.

Donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

2. $(I-M)(I+M+M^2)=I+M+M^2-M-M^2-M^3=\boxed{I}$.

Alors $N(I+M+M^2)=I$ donc $\boxed{N \text{ est inversible et } N^{-1}=I+M+M^2}$ ou $N^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&1\\-5&-2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$

3. $I(-M) = -M = (-M)I$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}(I-M)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} I^{n-k}(-M)^k \\ &= 1I^n(-M)^0 + nI^{n-1}(-M)^1 + \tfrac{n(n-1)}{2}I^{n-2}(-M)^2 \qquad \text{car } \forall k \geqslant 2, M^k = \mathbf{O}_3 \\ &= \underline{I \times I - nIM + \tfrac{n(n-1)}{2}IM^2} \\ &= \boxed{I - nM + \tfrac{n(n-1)}{2}M^2}\end{aligned}$$

Pour $n = 1$: $N^1 = N = I - M$ et $I - 1M + \frac{1(1-1)}{2}M^2 = I - M + 0M^2 = I - M$ donc <u>la formule est vraie</u>.

Pour $n = 0$: $N^0 = I$ et $I - 0M + \frac{0(0-1)}{2}M^2 = I$ donc <u>la formule est vraie</u>.

Pour $n = -1$: $N^{-1} = I + M + M^2$ et $I - (-1)M + \frac{-1(-1-1)}{2}M^2 = I + M + \frac{2}{2}M^2 = I + M + M^2$ donc <u>la formule est encore vraie</u>.

Correction 6.

1. (a) $3J - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

Ainsi, en posant $\boxed{a = 3 \text{ et } b = -2}$, on a $A = aJ + bI$ soit $\underline{A = 3J - 2I}$.

(b) $J^2 = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{J^2 = 2J}$.

(c) Pour tout entier naturel n, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: $A^n = (-2)^n I + \dfrac{1}{2}\Big[4^n - (-2)^n\Big]J$.

Initialisation : Démontrons $\mathcal{P}(0)$.

D'une part, $A^0 = I$, et d'autre part, $(-2)^0 I + \frac{1}{2}\Big[4^0 - (-2)^0\Big]J = 1I + \frac{1}{2}\Big[1 - 1\Big]J = I$

Donc l'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $A^k = (-2)^k I + \dfrac{1}{2}\Big[4^k - (-2)^k\Big]J$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence : $A^k = (-2)^k I + \dfrac{1}{2}\Big[4^k - (-2)^k\Big]J$.

On multiplie des deux côtés par A à droite, on obtient :

$$\begin{aligned} A^kA &= \left((-2)^k I + \frac{1}{2}\Big[4^k - (-2)^k\Big]J\right)A = \left((-2)^k I + \frac{1}{2}\Big[4^k - (-2)^k\Big]J\right)\Big(3J - 2I\Big) \\ A^{k+1} &= (-2)^k I3J + (-2)^k I(-2)I + \frac{3}{2}\Big[4^k - (-2)^k\Big]J^2 - \Big[4^k - (-2)^k\Big]JI \\ &= 3 \times (-2)^k J + (-2)^{k+1} I + 3 \times \Big[4^k - (-2)^k\Big]J - \Big[4^k - (-2)^k\Big]J \qquad \text{car } J^2 = 2J \\ &= (-2)^{k+1} I + 3 \times 4^k J - 4^k J + (-2)^k J \\ &= (-2)^{k+1} I + \Big[2 \times 4^k - \tfrac{1}{2}(-2) \times (-2)^k\Big]J \\ &= (-2)^{k+1} I + \frac{1}{2}\Big[4^{k+1} - (-2)^{k+1}\Big]J \qquad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que pour tout entier naturel n,

$\boxed{A^n = (-2)^n I + \dfrac{1}{2}\Big[4^n - (-2)^n\Big]J}$.

(d) Alors, $A^n = (-2)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\Big[4^n - (-2)^n\Big]\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n + \frac{1}{2}\Big[4^n - (-2)^n\Big] & \frac{1}{2}\Big[4^n - (-2)^n\Big] \\ \frac{1}{2}\Big[4^n - (-2)^n\Big] & (-2)^n + \frac{1}{2}\Big[4^n - (-2)^n\Big] \end{pmatrix}$$

Or $(-2)^n + \frac{1}{2}\Big[4^n - (-2)^n\Big] = (-2)^n + \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n = \frac{1}{2}4^n + \frac{1}{2}(-2)^n = \frac{1}{2}\Big[4^n + (-2)^n\Big]$.

Donc $\boxed{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n + (-2)^n & 4^n - (-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & 4^n + (-2)^n \end{pmatrix}}$

2. (a) Soit $\mathcal{P}(n)$ l'égalité $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I$ donc $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$ donc l'égalité est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $X_k = A^k X_0$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$A^{k+1}X_0 = AA^kX_0$, or on a supposé que $X_k = A^kX_0$, donc $A^{k+1}X_0 = AX_k$.
Or, $AX_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_k + 3w_k \\ 3v_k + w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = X_{k+1}$
Ainsi, on a bien $X_{k+1} = A^{k+1}X_0$, l'égalité est donc vraie aussi au rang $k+1$.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$.

(b) $X_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $X_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n + (-2)^n & 4^n - (-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & 4^n + (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3(4^n + (-2)^n) + 4^n - (-2)^n \\ 3(4^n - (-2)^n) + 4^n + (-2)^n \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + 2(-2)^n \\ 4^{n+1} + (-2)^{n+1} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^{n+1} - (-2)^{n+1} \\ 4^{n+1} + (-2)^{n+1} \end{pmatrix}}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2}\Big(4^{n+1} - (-2)^{n+1}\Big) \text{ et } w_n = \frac{1}{2}\Big(4^{n+1} + (-2)^{n+1}\Big)}$.

3. (a) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété $u_n = \frac{v_n}{w_n}$.

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 3$, et $\frac{v_0}{w_0} = \frac{3}{1} = 3$ donc $u_0 = \frac{v_0}{w_0}$.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k = \frac{v_k}{w_k}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a $u_{k+1} = \frac{u_k + 3}{3u_k + 1}$, donc par hypothèse de récurrence, $u_{k+1} = \frac{\frac{v_k}{w_k} + 3}{3\frac{v_k}{w_k} + 1}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par w_k, on obtient $u_{k+1} = \frac{v_k + 3w_k}{3v_k + w_k} = \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}}$, CQFD.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n = \frac{v_n}{w_n}}$.

(b) Ainsi, $u_n = \frac{\frac{1}{2}\Big(4^{n+1} - (-2)^{n+1}\Big)}{\frac{1}{2}\Big(4^{n+1} + (-2)^{n+1}\Big)} = \boxed{\frac{4^{n+1} - (-2)^{n+1}}{4^{n+1} + (-2)^{n+1}}}$.

(c) On a $u_n = \frac{4^{n+1}\left(1 - \left(\frac{-2}{4}\right)^{n+1}\right)}{4^{n+1}\left(1 + \left(\frac{-2}{4}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

Or, $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.

Correction 7.

1. $$x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+5=0 \iff (x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z+3)^2-9+5=0$$
$$\iff (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} \text{ est la sphère de centre } \Omega(1,2,-3) \text{ et de rayon } 3}$.

2. (a) $\boxed{\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+4\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}}$

(b) On cherche les coordonnées du projeté orthogonal H de Ω sur $\mathcal{D}$.

$\star$ $H\in\mathcal{D}$ donc $\exists\lambda\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{u}$.

Donc $\begin{cases} x_H=2+\lambda \\ y_H=4+2\lambda \\ z_H=-1 \end{cases}$

$\star$ (ΩH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{\Omega H}.\overrightarrow{u}=0$.

Donc $(2+\lambda-1)\times 1+(4+2\lambda-2)\times 2+(-1+3)\times 0=0$ soit $1+\lambda+4+4\lambda=0$ soit $\lambda=-1$

On remplace dans le premier système, on a $x_H=1$, $y_H=2$ et $z_H=-1$.

Alors $d(\Omega,\mathcal{D})=\Omega H=\sqrt{(1-2)^2+(2-4)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{5}$.

$\boxed{\text{La distance entre } \Omega \text{ et } \mathcal{D} \text{ est } \sqrt{5}.}$

Or $\sqrt{5}<3$ donc $\boxed{\text{la droite } \mathcal{D} \text{ coupe la sphère } \mathcal{S} \text{ en deux points}}$.

3. (a) $(2-1)^2+(4-2)^2+(-5+3)^2=1+4+4=9$ donc $\boxed{\text{le point } B \text{ est sur la sphère } \mathcal{S}}$.

(b) $\overrightarrow{\Omega B}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal plan tangent $\mathcal{T}$.

De plus, $B\in\mathcal{T}$ donc $$M(x,y,z)\in\mathcal{T} \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{\Omega B}=0$$
$$\iff 1(x-2)+2(y-4)-2(z+5)=0$$
$$\iff x+2y-2z-20=0$$

Donc $\boxed{\text{le plan tangent a pour équation cartésienne } x+2y-2z-20=0}$.

4. (a) On note $\overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}m\\m+1\\m-1\end{pmatrix}$, c'est un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$.

Le plan $\mathcal{P}_m$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{n_m}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{n}_m\cdot\overrightarrow{u}=0$.

Or $\overrightarrow{n_m}.\overrightarrow{u}=0 \iff m+2(m+1)+0=0 \iff 3m+2=0 \iff m=-\dfrac{2}{3}$.

Pour la valeur $m=-\dfrac{2}{3}$, vérifions si la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}_m$. Comme les deux sont parallèles, il suffit de regarder si le point A (qui est sur la droite $\mathcal{D}$) est aussi sur $\mathcal{P}_m$, ou non.

$2m+4(m+1)-(m-1)=4m+3=\dfrac{1}{3}\neq 0$

A n'est pas sur $\mathcal{P}_m$, donc $\boxed{\mathcal{D} \text{ n'est pas incluse dans } \mathcal{P}_m}$.

(b) Étudions l'intersection de $\mathcal{P}_0\ :\ y-z=0$ et $\mathcal{P}_1\ : x+2y=0$.

O est dans chacun de ces plans.

Et on note $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, c'est le produit vectoriel de deux vecteurs normaux respectivement aux plans $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

Donc $\boxed{\text{l'intersection de } \mathcal{P}_0 \text{ et } \mathcal{P}_1 \text{ est la droite } \Delta \text{ passant par } O \text{ et de vecteur directeur } \overrightarrow{v}}$.

Un système d'équations paramétriques de Δ est $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Vérifions que la droite Δ est incluse dans tous les plans :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad m \times 2t + (m+1) \times (-t) + (m-1) \times (-t) = 2mt - mt - t - mt + t = 0$$

On a donc $\boxed{\Delta \subset \mathcal{P}_m}$.

Donc $\boxed{\text{l'intersection de tous les plans } \mathcal{P}_m \text{ est la droite } \Delta \ : \ \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$.

Correction 8.

1. **(a)** On tire successivement et avec remise, donc chaque issue est une 3-liste d'éléments de l'ensemble des 10 boules.
Donc $\boxed{\Omega = \{\text{boules}\}^3}$ et $\boxed{\text{card}(\Omega) = 10^3}$.

(b) A **:** il n'y a qu'une seule issue favorable à l'événement A car on doit obtenir la boule 1 sur chaque tirage, et les boules sont indiscernables donc on est dans une situation d'équiprobabilité, donc $\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{1}{1000}}$.

B est la réunion disjointe des événements suivants :

* obtenir 3 fois la boule 1 : cela fait 1 issue (A) ;
* obtenir 3 fois une boule 2 : chaque issue est une 3-liste d'éléments de {boules n°2} donc 2^3 issues ;
* obtenir 3 fois une boule 3 : même principe, 3^3 issues ;
* obtenir 3 fois une boule 4 : 4^3 issues.

Donc $\text{card}(B) = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$ donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}}$.

$C = \{\text{boule n°1}\} \times \{\text{boules n°2}\} \times \{\text{boules n°3}\}$ donc $\text{card}(C) = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
Donc $\boxed{\mathbf{P}(C) = \frac{6}{1000} = \frac{3}{500}}$

D peut être obtenu à partir des issues de C que l'on permute, il y a donc 3! fois plus d'issues dans D que dans C, donc $\boxed{\mathbf{P}(D) = \frac{6\times6}{1000} = \frac{9}{250}}$.

2. Ω **:** les tirages sont successifs et sans remise, donc chaque issue est une 4-liste d'éléments distincts de l'ensemble des 10 boules, il y en a $\frac{10!}{(10-4)!}$ donc $\boxed{\text{card}(\Omega) = 10 \times 9 \times 8 \times 7}$.

E **:** pour former les issues favorables à E, on fait pareil mais en ne piochant que parmi les 6 boules rouges, cela fait donc $\frac{6!}{(6-4)!}$ issues, donc $\text{card}(E) = 6 \times 5 \times 4 \times 3$.
On est toujours en situation d'équiprobabilité donc $\boxed{\mathbf{P}(E) = \frac{6\times5\times4\times3}{10\times9\times8\times7} = \frac{1}{14}}$.

F **:** en fait, $\overline{F}$: « ne pas obtenir de boule rouge », donc pour réaliser $\overline{F}$, on ne peut piocher que dans les 4 boules vertes, cela fait donc $4\times3\times2\times1$ possibilités, donc $\boxed{\mathbf{P}(F) = 1 - \frac{4\times3\times2\times1}{10\times9\times8\times7} = \frac{209}{210}}$.

G **:** les issues avec une boule rouge en premier puis 3 boules vertes forment l'événement $\{\text{boules rouges}\} \times \{\text{3-listes de boules vertes}\}$, cela fait $6 \times 4 \times 3 \times 2$ possibilités.
Il y en a autant avec la boule rouge en 2ème position, ou en 3ème position ou en dernier, donc $\text{card}(G) = 4 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2$ donc $\boxed{\mathbf{P}(G) = \frac{4\times6\times4\times3\times2}{10\times9\times8\times7} = \frac{4}{35}}$

Correction 9.

1. **(a)** Faux **(b)** Vrai **(c)** Vrai **(d)** Faux **(e)** Vrai

2. **(a)** Faux **(b)** Vrai **(c)** Faux **(d)** Vrai

3. **(a)** Faux **(b)** Faux **(c)** Vrai **(d)** Faux