Corrigé du DS n°5

Correction 1.

1. f est une fraction rationnelle, $x+2=0 \iff x=-2$ donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{-2\}}$.

$\forall x \neq -2,\ f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2} < 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty,-2[\text{ et décroissante sur }]-2,+\infty[}$.

2. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : u_n est défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Initialisation : $u_0 = 1$ donc u_0 est défini et $0 \leqslant 1 \leqslant 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire u_k est défini et $0 \leqslant u_k \leqslant 1$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On remarque que, sous réserve d'existence, $u_{k+1} = f(u_k)$.
Or par hypothèse, $u_k \in [0,1]$ donc $u_k \neq -2$ donc on peut calculer $f(u_k)$ donc u_{k+1} est bien défini.
De plus, $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ et f est décroissante sur $]-2,+\infty[$ donc $f(0) \geqslant f(u_k) \geqslant f(1)$.
Or $f(0) = \frac{1}{2} \leqslant 1$ et $f(1) = \frac{1}{3} \geqslant 0$, donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.
Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est défini et } 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$.

3. $u_1 = f(u_0) = f(1) = \boxed{\frac{1}{3}}$ et $u_2 = f(\frac{1}{3}) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}+2} = \dfrac{1}{\frac{7}{3}} = \boxed{\dfrac{3}{7}}$.

Ainsi, $u_1 < u_0$ donc (u_n) n'est pas croissante.
Et $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$ et $\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ donc $u_2 > u_1$, donc (u_n) n'est pas décroissante.
Donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas monotone}}$.

4. (a) Soit n dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|u_{n+2} - u_{n+1}| &= \left|\frac{1}{u_{n+1}+2} - \frac{1}{u_n+2}\right| \\
&= \left|\frac{u_n+2-(u_{n+1}+2)}{(u_n+2)(u_{n+1}+2)}\right| \\
&= \frac{1}{|u_n+2|} \times \frac{1}{|u_{n+1}+2|}\,|u_n - u_{n+1}|
\end{aligned}$$

Or $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc $0 < 2 \leqslant u_n+2 \leqslant 3$, donc $\frac{1}{|u_n+2|} \leqslant \frac{1}{2}$
De même, $\frac{1}{|u_{n+1}+2|} \leqslant \frac{1}{2}$.
Les nombres sont positifs donc $\frac{1}{|u_n+2|} \times \frac{1}{|u_{n+1}+2|} \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{|u_{n+1}+2|} \leqslant \frac{1}{4}$.
Et par produit avec $|u_{n+1}-u_n|$ (égal à $|u_n - u_{n+1}|$), on obtient $\boxed{|u_{n+2}-u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}|u_{n+1}-u_n|}$.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$: $|u_{n+1}-u_n| \leqslant \dfrac{2}{3 \times 4^n}$.
Initialisation : $|u_1 - u_0| = \left|\frac{1}{3} - 1\right| = \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3\times 4^0} = \frac{2}{3\times 1} = \frac{2}{3}$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $|u_{k+1}-u_k| \leqslant \dfrac{2}{3\times 4^k}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

D'après la question précédente, $|u_{k+2}-u_{k+1}| \leqslant \frac{1}{4}|u_{k+1}-u_k|$.
Or, d'après $\mathcal{P}(k)$, $\dfrac{1}{4}|u_{k+1}-u_k| \leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3\times 4^k}$.
On a donc $|u_{k+2}-u_{k+1}| \leqslant \dfrac{2}{3\times 4^{k+1}}$ CQFD.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{2}{3 \times 4^n}}$.

5. **(a)** Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_{2(n+1)} \leqslant u_{2n}$.
Initialisation : $u_{2\times(0+1)} = u_2 = \frac{3}{7}$ et $u_{2\times 0} = u_0 = 1 > \frac{3}{7}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{2(k+1)} \leqslant u_{2k}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse et avec la question **2.**, $0 \leqslant u_{2(k+1)} \leqslant u_{2k}$.
On applique f, décroissante sur $]-2, +\infty[$.
Alors $f(u_{2(k+1)}) \geqslant f(u_{2k})$, soit $u_{2(k+1)+1} \geqslant u_{2k+1}$.
Toujours d'après **2.**, les termes sont positifs donc peut appliquer encore f, et on obtient $f(u_{2(k+1)+1}) \leqslant f(u_{2k+1})$ soit $u_{2(k+1)+2} \leqslant u_{2k+2}$ donc $u_{2(k+1+1)} \leqslant u_{2(k+1)}$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(k+1)} \leqslant u_{2k}$.
Donc $\boxed{(u_{2n}) \text{ est décroissante}}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_{2(n+1)} \leqslant u_{2n}$ donc en appliquant f, $u_{2(n+1)+1} \geqslant u_{2n+1}$.
Donc $\boxed{(u_{2n+1}) \text{ est croissante}}$.

6. D'après **4.(b)**, $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{2}{3\times 4^{2n}} \leqslant u_{2n+1} - u_{2n} \leqslant \frac{2}{3\times 4^{2n}}$.
Or $4^{2n} = 16^n$ et $16 > 1$ donc par inverse $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3\times 4^{2n}} = 0$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$.
Et (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.
Donc $\boxed{(u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}}$.
Donc d'après les résultats sur les suites adjacentes, elles convergent vers la même limite.
Et donc, puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, on peut affirmer que $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

7. • (u_{n+1}) est extraite de (u_n) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
• $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\ell \geqslant 0$ car (u_n) est minorée par 0, donc $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = \dfrac{1}{\ell+2}$,
donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n+2} = \dfrac{1}{\ell+2}$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n+2}$, donc par unicité de la limite, $\ell = \frac{1}{\ell+2}$, soit $\ell(\ell+2) = 1$ donc $\boxed{\ell^2 + 2\ell - 1 = 0}$.
On résout $x^2 + 2x - 1 = 0$: $\Delta = 2^2 - 4\times(-1) = 8 = (2\sqrt{2})^2$
donc $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} < 0$ et $x_2 = -1+\sqrt{2} > 0$.
Or on a vu que $\ell \geqslant 0$, donc $\boxed{\ell = -1+\sqrt{2}}$.

Correction 2.

1. **(a)**
$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+5=0 &\iff (x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z+3)^2-9+5=0 \\ &\iff (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9 \end{aligned}$$
Donc $\boxed{\mathcal{S} \text{ est la sphère de centre } \Omega(1,2,-3) \text{ et de rayon } 3}$.

(b) On note H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$.
⋆ $H \in \mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ donc il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{u}$ soit $x_H = \lambda+3, y_H = 2\lambda+6$ et $z_H = -1$
⋆ (ΩH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{\Omega H}.\overrightarrow{u} = 0$ soit $1(x_H-1)+2(y_H-2)+0(z_H+3)=0$ donc $x_H + 2y_H = 5$.
Donc $\lambda+3+4\lambda+12 = 5$ donc $5\lambda = -10$ soit $\lambda = -2$ et $x_H = 1, y_H = 2$ et $z_H = -1$.

Alors, $\Omega H = \sqrt{0^2+0^2+2^2} = 2$. $\boxed{\text{La distance entre } \Omega \text{ et } \mathcal{D} \text{ est } 2}$.
Cette distance est plus petite que le rayon de la sphère.
Donc $\boxed{\text{la droite } \mathcal{D} \text{ coupe la sphère } \mathcal{S} \text{ en deux points}}$.

2. **(a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2n^3 = \boxed{-\infty}$

(b) $v_n = \dfrac{e^n(1-\frac{2^n}{e^n})}{n(\frac{\ln(n)}{n}-2+\frac{3}{n})} = \dfrac{e^n}{n} \times \dfrac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{\frac{\ln(n)}{n}-2+\frac{3}{n}}$.

$\star$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$ par croissances comparées

$\star$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\dfrac{2}{e}\right)^n = 1$ car $-1 < \frac{2}{e} < 1$

$\star$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissances comparées et donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} - 2 + \dfrac{3}{n} = -2$

Donc par produit et quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$.

3. **(a)** $z^3 = 27i \iff z^3 = 3^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $\mathcal{S} = \{3e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{3}},\ k \in [\![0,2]\!]\} = \boxed{\{3e^{i\frac{\pi}{6}}, 3e^{i\frac{5\pi}{6}}, 3e^{i\frac{3\pi}{2}}\}}$

(b) L'équation est définie si et seulement si $1+x>0$, $x-1>0$ et $x>0$.
Donc $\boxed{\mathcal{D} =]1;+\infty[}$.

$$\begin{aligned}
2\ln(1+x)+\ln(x-1) = 3\ln(x) &\iff \ln\left((1+x)^2(x-1)\right) = \ln(x^3) \\
&\iff (1+x)^2(x-1) = x^3 \\
&\iff (1+2x+x^2)(x-1) = x^3 \\
&\iff x+2x^2+x^3-1-2x-x^2 = x^3 \\
&\iff x^2-x-1 = 0
\end{aligned}$$

On résout : $\Delta = 5$ donc $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \notin \mathcal{D}$ ou $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathcal{D}$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

Correction 3.

1. On tire simultanément deux boules de la boîte, donc chaque issue est une partie à deux éléments de l'ensemble des boules de la boîte. Il y a au total $3+2+n$ soit $n+5$ boules.
Le nombre de tirages de deux boules est donc $\dbinom{n+5}{2}$ soit $\frac{(n+5)(n+5-1)}{2}$.
Donc $\boxed{\text{Card}(\Omega) = \frac{(n+5)(n+4)}{2}}$.

2. A est l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des boules rouges.
Si $n=0$ ou $n=1$, $A = \{\}$ donc $\mathbf{P}(A) = 0$.
Si $n \geqslant 2$, il y a $\binom{n}{2}$ issues favorables à l'événement A, donc $\text{Card}(A) = \frac{n(n-1)}{2}$.
De plus, les boules sont indiscernables donc on est dans une situation d'équiprobabilité.
Donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \boxed{\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}}$.
$\boxed{\overline{A} \text{ est « au moins une des deux boules n'est pas rouge »}}$.

3. B est l'ensemble des parties à 2 éléments de l'ensemble des boules jaunes, il y a 3 boules jaunes donc $\text{Card}(B) = \binom{3}{2} = 3$, donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = \frac{6}{(n+5)(n+4)}}$.
Il n'y a que deux boules vertes dans la boîte, donc une seule issue favorable à C donc $\boxed{\mathbf{P}(C) = \frac{2}{(n+5)(n+4)}}$.
L'événement « obtenir deux boules de la même couleur » est $A \cup B \cup C$ et ces événements sont

deux à deux incompatibles, donc :
$\mathbf{P}(\text{« obtenir deux boules de la même couleur »}) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C) = \frac{n(n-1)+6+2}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}$.

Or, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)} \geqslant \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow 2(n^2-n+8) \geqslant (n+5)(n+4) \text{car } (n+5)(n+4) > 0 \text{ et } 2>0\\ &\Longleftrightarrow 2n^2-2n+16 \geqslant n^2+9n+20\\ &\Longleftrightarrow n^2-11n-4 \geqslant 0\end{aligned}$$

$\Delta = (-11)^2 - 4\times(-4) = 121+16 = 137$

Donc $n_1 = \frac{11-\sqrt{137}}{2}$ et $n_2 = \frac{11+\sqrt{137}}{2}$.

$a = 1 > 0$ donc pour $n \geqslant 0$, l'inégalité est vérifiée pour $n \geqslant n_2$.

Or $144 \leqslant 137 \leqslant 169$ (et la racine carrée est croissante) donc $12 \leqslant \sqrt{137} \leqslant 13$, donc n étant entier, $n \geqslant n_2$ est équivalent à $n \geqslant \frac{11+13}{2}$ soit $n \geqslant 12$.

Donc $\boxed{\text{à partir de 12 boules rouges, la probabilité que les deux boules piochées soient de même couleur est plus grande que } \frac{1}{2}.}$

Correction 4.

1. $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ donc
$$\begin{aligned}|\omega_k - 1|^2 &= \left|e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right|^2\\ &= \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)\left(e^{\frac{-2ik\pi}{n}} - 1\right) \qquad (\text{car } |z|^2 = z \times \overline{z})\\ &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} \times e^{\frac{-2ik\pi}{n}} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{\frac{-2ik\pi}{n}} + 1\\ &= 2 - 2\cos(\tfrac{2k\pi}{n}) \qquad (\text{car } e^{\frac{2ik\pi}{n}} \times e^{\frac{-2ik\pi}{n}} = 1)\end{aligned}$$.

Donc $\boxed{S = \sum_{k=0}^{n-1}\left(2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)}$.

2. Alors $S = \sum_{k=0}^{n-1} 2 - 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 2n - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k\right)$.

Or $\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$.

Donc $\boxed{S = 2n}$.

Correction 5.

1. **(a)** $AU_n = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\\ 1u_{n+1} + 0u_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix} = U_{n+1}$

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = AU_n}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: $U_n = A^n U_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I$ donc $A^0U_0 = IU_0 = U_0$: l'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $U_k = A^kU_0$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $U_k = A^kU_0$.
On multiplie cette égalité par A à gauche : $AU_k = AA^kU_0 = A^{k+1}U_0$.
Or, d'après la question précédente, $AU_k = U_{k+1}$, donc $U_{k+1} = A^{k+1}U_0$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n = A^nU_0}$.

2. **(a)** $AP = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times 1 - \frac{1}{4}\times 2 & 1\times 2 - \frac{1}{4}\times 0\\ 1\times 1 + 0\times 2 & 1\times 2 + 0\times 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$PT = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times\frac{1}{2} + 2\times 0 & 1\times 1 + 2\times\frac{1}{2}\\ 2\times\frac{1}{2} + 0\times 0 & 2\times 1 + 0\times\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Donc $\boxed{AP = PT}$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}(n) : A^nP = PT^n$ est vraie.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0P = IP = P$ et $PT^0 = PI = P$ donc l'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $A^kP = PT^k$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $A^kP = PT^k$.
Or $A^{k+1}P = AA^kP = A(A^kP)$ donc
$$\begin{aligned} A^{k+1}P &= A(PT^k) \\ &= (AP)T^k \\ &= (PT)T^k \text{ car } AP = PT \\ &= PT^{k+1} \text{ CQFD} \end{aligned}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^nP = PT^n}$.

3. (a) $B = T - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.
Et $B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.
Alors $\underline{\forall k \geqslant 2}$, $B^k = B^2 \times B^{k-2} = \mathbf{0} \times B^{k-2} = \underline{\mathbf{0}}$

(b) $T = B + \frac{1}{2}I$ donc $T^n = (B + \frac{1}{2}I)^n$.
Or $B \times \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}BI = \frac{1}{2}B$ et $(\frac{1}{2}I)B = \frac{1}{2}IB = \frac{1}{2}B$, donc $\left(\frac{1}{2}I\right)$ et B commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour $n \geqslant 2$:
$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \left(\frac{1}{2}I\right)^{n-k} \\ &= 1I\left(\frac{1}{2}\right)^n I^n + nB\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} I^{n-1} + \mathbf{0} \qquad \text{car } \forall k \geqslant 2,\ B^k = \mathbf{0} \\ &= \frac{1}{2^n}II + \frac{n}{2^{n-1}}BI \\ &= \frac{1}{2^n}I + \frac{n}{2^{n-1}}B \text{ et pour } n = 1 \text{ cette formule est vraie aussi car } 2^1 = 2 \text{ et } 2^{1-1} = 1. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{T^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2^n} & \dfrac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}}$

4. (a) Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ quelconque. On résout $PX = Y$:
$$PX = Y \iff \begin{cases} x + 2y = a \\ 2x = b \end{cases}$$
D'après la ligne 2, $x = \frac{b}{2}$ donc dans la ligne 1, $2y = a - \frac{b}{2}$ donc $y = \frac{1}{2}a - \frac{b}{4}$.
Donc $PX = Y \iff X = \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b \end{pmatrix}$.

Le système a donc une unique solution donc $\underline{P \text{ est inversible}}$ et $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}$.

(b) $A^nP = PT^n$ donc $A^nPP^{-1} = PT^nP^{-1}$ (multiplication par P^{-1} à droite).
Donc, comme $PP^{-1} = I$, $A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2^n} & \dfrac{n}{2^{n-1}} \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n+1}{2^{n-1}} \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{2n}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2^n} & \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^n} \end{pmatrix} \text{donc } \boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2^n} & -\frac{n}{2^{n+1}} \\ \frac{n}{2^{n-1}} & \frac{1-n}{2^n} \end{pmatrix}}$$

5. u_n est le coefficient du bas de U_n, donc le coefficient du bas de $A^n U_0$ soit $A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $u_n = \frac{n}{2^{n-1}} \times 2 + \frac{1-n}{2^n} \times 1 = \frac{4n}{2^n} + \frac{1-n}{2^n} = \frac{3n+1}{2^n}$

$\boxed{\text{Pour tout } n,\ u_n = \frac{3n+1}{2^n}.}$

Correction 6.

1. **(a)** Faux **(b)** Faux **(c)** Vrai **(d)** Faux **(e)** Vrai

2. **(a)** Faux **(b)** Vrai **(c)** Faux

3. **(a)** Faux **(b)** Vrai **(c)** Faux **(d)** Faux

4. *il y a plusieurs possibilités pour les majorants et minorants !*

$\{\sin(x),\ x \in]0,\pi[\}$	2	1	1	-1	-1	-1
$\left\{\frac{x^3}{x^3-1},\ x \in]0,1[\right\}$	0	$\times$	0	$\times$	$\times$	$\times$
$[6;47[\cup \{2\} \cup [100,+\infty[$	$\times$	$\times$	$\times$	0	2	2
$\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$	1	1	1	0	$\times$	0
$\left\{x+\frac{1}{x},\ x \in]0,+\infty[\right\}$	$\times$	$\times$	$\times$	0	2	2