Correction du DS n° 5

Regarder le cours sur les matrices, pour retrouver toutes les possibilités pour justifier qu'une matrice est inversible, et déterminer l'inverse. Il n'y a pas que le pivot de Gauss !

Exercice 1.

- $u_n = \dfrac{n^3-3}{6n^3+6n^2+8n+8} = \dfrac{n^3(1-\frac{3}{n^3})}{n^3(6+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{8}{n^3})} = \dfrac{1-\frac{3}{n^3}}{6+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{8}{n^3}}$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{3}{n^3} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 6+\dfrac{6}{n}+\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{8}{n^3} = 6$.

  Donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{6}}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant \sin(n^2) \leqslant 1$, donc $\forall n \geqslant 1, \frac{-1}{2n-1} \leqslant \frac{\sin(n^2)}{2n-1} \leqslant \frac{1}{2n-1}$. (car $2n-1>0$)

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n-1} = 0$.

  Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n^2)}{2n-1} = 0$.

  Donc en ajoutant 3, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, |(-1)^n| = 1$ donc $|w_n| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2^n+1}$.

  Or $\frac{\sqrt{n}}{2^n+1} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}$.

  Or $2>1$ donc, d'une part, par le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{2^n} = 0$

  et d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{2^n}} = 1$.

  Donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{2^n+1} = 0$.

  Donc, par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$.

Exercice 2.

Partie A.

1. $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \mathbf{0}_3$.

Si M était inversible, alors $M^{-1}M^3 = M^{-1}\mathbf{0}_3$ c'est-à-dire $M^2 = \mathbf{0}_3$ ce qui est exclu.
Donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

2. $(I-M)(I+M+M^2) = I+M+M^2-M-M^2-M^3 = \boxed{I}$.

Alors $N(I+M+M^2) = I$ donc N est inversible et $N^{-1} = I+M+M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $I(-M) = -M = (-M)I$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
(I-M)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}(-M)^k \\
&= 1I^n(-M)^0 + nI^{n-1}(-M)^1 + \tfrac{n(n-1)}{2} I^{n-2}(-M)^2 \qquad \text{car } \forall k \geqslant 2, M^k = \mathbf{O}_3 \\
&= I \times I - nIM + \tfrac{n(n-1)}{2} IM^2 \\
&= \underline{I - nM + \tfrac{n(n-1)}{2} M^2}
\end{aligned}$$

Pour $n=1$: $N^1 = N = I-M$ et $I - 1M + \frac{1(1-1)}{2}M^2 = I - M + 0M^2 = I-M$ donc la formule est vraie.
Pour $n=0$: $N^0 = I$ et $I - 0M + \frac{0(0-1)}{2}M^2 = I$ donc la formule est vraie.

Pour $n=-1$: $N^{-1}=I+M+M^2$ et $I-(-1)M+\frac{-1(-1-1)}{2}M^2=I+M+\frac{2}{2}M^2=I+M+M^2$ donc la formule est encore vraie.
Donc, $\boxed{\forall n\in [\![-1,+\infty[\![, N^n=I-nM+\frac{n(n-1)}{2}M^2}$.

Partie B.

1. $\forall X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $MX=\begin{pmatrix}2x+y+0z\\-3x-y+z\\x-z\end{pmatrix}$.
Donc, si on note φ_M l'application linéaire canoniquement associée à M, alors
$$\varphi_M:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y,-3x-y+z,x-z)\end{array}$$

2. • Noyau : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(M)\iff\left\{\begin{array}{lcl}2x+y&=&0\\-3x-y+z&=&0\\x-z&=&0\end{array}\right.$

La résolution du système donne $\boxed{\mathrm{Ker}(M)=\left\{z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\mid z\in\mathbb{R}\right\}}$.

• Image : $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}(M)\iff \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{lcl}2x+y&=&a\\-3x-y+z&=&b\\x-z&=&c\end{array}\right.$.

par les opérations successives $L_1\leftarrow\frac{1}{2}L_1$ puis $L_2\leftarrow L_2+3L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1$ et enfin $L_3\leftarrow L_3+L_2$, on obtient le système équivalent suivant $\left\{\begin{array}{rcc}x+\frac{1}{2}y&=&\frac{a}{2}\\ \frac{1}{2}y+z&=&b+3\frac{a}{2}\\ 0&=&a+b+c\end{array}\right.$

Ce système a (au moins) une solution si et seulement si $a+b+c=0$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(M)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid a+b+c=0\right\}}$.

Exercice 3.

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $0\leqslant u_n\leqslant 1$.

Initialisation : $u_0=0$ et $0\leqslant 0\leqslant 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $0\leqslant u_k\leqslant 1$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Par hypothèse, $0\leqslant u_k\leqslant 1$, et la fonction carré est croissante sur $[0,+\infty[$, donc $0^2\leqslant (u_k)^2\leqslant 1^2$ soit $0\leqslant (u_k)^2\leqslant 1$.
On ajoute 1 et on divise par 2 (positif), on obtient $\frac{1}{2}\leqslant\frac{(u_k)^2+1}{2}\leqslant\frac{1+1}{2}$.
Or $u_{k+1}=\frac{(u_k)^2+1}{2}$ et $\frac{1}{2}\geqslant 0$ et $\frac{1+1}{2}=1$ donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vérifiée.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant 1}$.

2. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n)^2+1}{2}-\frac{2u_n}{2}=\frac{(u_n)^2+1-2u_n}{2}=\frac{(u_n-1)^2}{2}\geqslant 0$.
Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

Remarque : *on pouvait aussi calculer u_1, constater qu'il est plus grand que u_0, puis démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.*

3. (u_n) est croissante, et majorée par 1, donc $\boxed{\text{elle converge}}$.

4. La suite (u_{n+1}) est extraite de la suite (u_n), elle a donc la même limite ℓ.
De plus, par opérations sur les limites, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(u_n)^2+1}{2} = \dfrac{\ell^2+1}{2}$.
Or $\forall n,\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^2+1}{2}$, donc par unicité de la limite, $\boxed{\ell = \frac{\ell^2+1}{2}}$.
Donc $2\ell = \ell^2+1$ soit $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$ donc $(\ell-1)^2 = 0$ donc $\boxed{\ell = 1}$.

Exercice 4.

1. **(a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & 13 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$3I - 2A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 12 & -10 & 12 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & 13 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{A^2 = 3I - 2A}$.
Donc $A^2 + 2A = 3I$ donc $A(A+2I) = 3I$ donc $A\left(\frac{1}{3}(A+2I)\right) = I$.
Donc $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{3}(A+2I)}$.

$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}}$.

(b) $AH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & -9 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -3H.$

Donc $\boxed{\text{avec } a = -3, \text{ on a } AH = aH}$.

(c) $I + 2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1-6 & 6 \\ 2 & -2 & 1+2 \end{pmatrix} = A.$

Donc $\underline{b = 2}$ convient, et $\boxed{A = I + 2H}$.

2. **(a)** Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $A^n = I + b_n H$.

Initialisation : $A^0 = I$ et $I + b_0 H = I + 0H = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $A^k = I + b_k H$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$A^{k+1} = AA^k$, donc par hypothèse de récurrence, $A^{k+1} = A(I + b_k H)$.
Donc $A^{k+1} = AI + b_k AH = A + b_k(-3)H$
Or $A = I + 2H$, donc $A^{k+1} = I + 2H - 3b_k H = I + (2 - 3b_k)H$.
Or $2 - 3b_k = b_{k+1}$ donc $A^{k+1} = I + b_{k+1}H$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I + b_n H}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = b_{n+1} - \frac{1}{2}$
$= -3b_n + 2 - \frac{1}{2}$
$= -3b_n + \frac{3}{2}$
$= -3(b_n - \frac{1}{2})$
$= -3x_n$

Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est géométrique de raison } -3}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = x_0 \times (-3)^n = (b_0 - \frac{1}{2})(-3)^n = -\frac{1}{2}(-3)^n$.
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n = -\frac{1}{2}(-3)^n + \frac{1}{2}}$.

(c) Alors $3b_n+3=-\frac{3}{2}(-3)^n+\frac{3}{2}+3=-\frac{3}{2}(-3)^n+\frac{9}{2}$ donc $\boxed{\begin{pmatrix}1\\3b_n+3\\b_n+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}(-3)^n+\frac{9}{2}\\-\frac{1}{2}(-3)^n+\frac{7}{2}\end{pmatrix}}$.

3. (a) $AX_n=\begin{pmatrix}1\\6-5u_n+6v_n\\2-2u_n+3v_n\end{pmatrix}$

Or $X_{n+1}=\begin{pmatrix}1\\u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6-5u_n+6v_n\\2-2u_n+3v_n\end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{X_{n+1}=AX_n}$.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $X_n=A^nX_0$.

Initialisation : $A^0X_0=IX_0=X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $X_k=A^kX_0$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

D'après la question précédente, $X_{k+1}=AX_k$, or par hypothèse de récurrence, $X_k=A^kX_0$.
Donc $X_{k+1}=AA^kX_0=A^{k+1}X_0$, CQFD.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, X_n=A^nX_0}$.

(c) $X_0=\begin{pmatrix}1\\u_0\\v_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$.

Donc d'après les questions **2.(a)** et **(d)**, $A^nX_0=\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}(-3)^n+\frac{9}{2}\\-\frac{1}{2}(-3)^n+\frac{7}{2}\end{pmatrix}$.

Donc, d'après la question précédente, $\boxed{u_n=-\frac{3}{2}(-3)^n+\frac{9}{2}}$ et $\boxed{v_n=-\frac{1}{2}(-3)^n+\frac{7}{2}}$.

$-3<1$ donc $(-3)^n$ n'a pas de limite, donc $\boxed{(u_n)\text{ et }(v_n)\text{ n'ont pas de limite}}$.

Exercice 5.

1.
$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z=11 &\Longleftrightarrow (x-1)^2-1^2+(y+3)^2-3^3+(z-2)^2-2^2=11\\&\Longleftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=11+1+9+4\\&\Longleftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=5^2\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}\text{ est la sphère dont le centre a pour coordonnées }(1,-3,2)\text{ et de rayon }5}$.

2.
$$\begin{aligned}x_A^2+y_A^2+z_A^2-2x_A+6y_A-4z_A&=1^2+(-3)^2+7^2-2\times1+6\times(-3)-4\times7\\&=1+9+49-2-18-28\\&=11\end{aligned}$$

Donc $\boxed{A\text{ est sur la sphère }\mathcal{S}}$.

3. On note Ω le centre de la sphère, alors A' vérifie $\overrightarrow{\Omega A'}=-\overrightarrow{\Omega A}$

Donc $\begin{cases}x_{A'}-1=-0\\y_{A'}+3=-0\\z_{A'}-2=-5\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_{A'}=1\\y_{A'}=-3\\z_{A'}=-3\end{cases}$. Donc $\boxed{A'(1,-3,-3)}$.

4. Le plan, que l'on notera $\mathcal{P}$, qui est tangent à la sphère en A passe par A et a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$.

Donc $M(x,y,z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A} = 0$.
Or $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5(z-7)$.
Donc $\boxed{\text{une équation de } \mathcal{P} \text{ est } z-7=0}$.
$\overrightarrow{\Omega A}$ est aussi normal au plan $\mathcal{P}'$, tangeant à la sphère en A'.
Et, pour $M(x,y,z)$, $\overrightarrow{A'M}.\overrightarrow{\Omega A} = 5(z+3)$.
Donc $\boxed{\text{une équation de } \mathcal{P}' \text{ est } z+3=0}$.

Exercice 6.

Dans l'espace, une droite est caractérisée par 2 équations cartésiennes ! Elle est vue comme l'intersection de deux plans !

1. Les points d'intersection potentiels de Δ et $\mathcal{P}$ vérifient le système : $\begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x=-3+2t \\ y=-6+5t \\ z=0 \end{cases}$.

En remplaçant dans la première ligne les expressions de x, y et z des trois dernières, on obtient $-3+2t+2(-6+5t)+0+3=0$ soit $-12+12t=0$ donc $t=1$.
Alors $x=-3+2\times 1=-1$, $y=-6+5\times 1=-1$ et $z=0$.
Donc $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ est sécante au plan } \mathcal{P} \text{ au point de coordonnées } (-1,-1,0)}$.

2. $x+2y+z+3=0 \iff x=-2y-z-3$.

Donc $\boxed{\text{une représentation paramétrique de } \mathcal{P} \text{ est } \begin{cases} x=-2s-t-3 \\ y=s \\ z=t \end{cases} \quad \text{avec } (s,t)\in\mathbb{R}^2}$.

On peut en déduire deux vecteurs directeurs : $\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

3. **(a)** $ABCD$ est un parallélogramme est équivalent à $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Or $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x_B=-2+3=1 \\ y_B=2+2=4 \\ z_B=-2+2=0 \end{cases}$. Donc $\boxed{B(1,4,0)}$.

(b) $B\in\Delta \iff \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} 1=-3+2t \\ 4=-6+5t \\ 0=0 \end{cases} \iff \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} 2t=4 \\ 5t=10 \\ z=0 \end{cases}$

Ce système est compatible et donne $t=2$, donc $\boxed{B\in\Delta}$.

4. **(a)** $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C(-1,-1,0)$ donc un paramétrage de (CD) est $\boxed{\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-2t-1 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}}$.

(b) H est le point tel que $H\in(CD)$ et $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD}=0$.
$H\in(CD)$ donc il existe $t\in\mathbb{R}$, $x_H=2t-1$ et $y_H=-2t-1$ et $z_H=2t$.

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD}=0 &\iff (2t-1-3)\times 2+(-2t-1-2)\times(-2)+(2t-2)\times 2=0 \\ &\iff 4t-8+4t+6+4t-4=0 \\ &\iff t=\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, en remplaçant dans les coordonnées de H, on obtient $\boxed{H(0,-2,1)}$.

(c) Alors $\mathcal{A}_{ABCD} = \text{base} \times \text{hauteur}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABCD} &= \text{base} \times \text{hauteur} \\ &= CD \times AH \\ &= \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} \times \sqrt{(-3)^2+(-4)^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{12} \times \sqrt{26} \\ &= \boxed{2\sqrt{78}} \end{aligned}$$

Exercice 7.

1. On tire simultanément deux boules de la boîte, donc chaque issue est une partie à deux éléments de l'ensemble des boules de la boîte. Il y a au total $3+2+n$ soit $n+5$ boules.
Le nombre de parties à 2 éléments est donc $\binom{n+5}{2}$ soit $\frac{(n+5)!}{(n+5-2)!2!} = \frac{(n+5)}{(n+3)!2} = \frac{(n+5)(n+4)}{2}$.
Donc $\boxed{\text{Card}(\Omega) = \frac{(n+5)(n+4)}{2}}$.

2. A est l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des boules rouges.
Si $n=0$ ou $n=1$, $A = \{\}$ donc $\mathbf{P}(A) = 0$.
Si $n \geqslant 2$, il y a $\binom{n}{2}$ issues favorables à l'événement A, donc $\text{Card}(A) = \frac{n(n-1)}{2}$.
De plus, les boules sont indiscernables donc on est dans une situation d'équiprobabilité.
Donc $\mathbf{P}(A) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \boxed{\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}}$. $\boxed{\overline{A} \text{ est « au moins une des deux boules n'est pas rouge »}}$.

3. On note B l'événement « obtenir deux boules jaunes ».
Les issues qui le constituent sont les parties à 2 éléments de l'ensemble des boules jaunes, il y a 3 boules jaunes donc $\text{Card}(B) = \binom{3}{2} = 3$, donc $\mathbf{P}(B) = \frac{6}{(n+5)(n+4)}$.
On note C l'événement « obtenir deux boules vertes ». Il n'y a que deux boules vertes dans la boîte, donc une seule issue favorable à C donc $\mathbf{P}(C) = \frac{2}{(n+5)(n+4)}$.
L'événement « obtenir deux boules de la même couleur » est $A \cup B \cup C$ et ces événements sont deux à deux incompatibles, donc :
$\mathbf{P}(\text{« obtenir deux boules de la même couleur »}) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C) = \frac{n(n-1)+6+2}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}$.
Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)} \geqslant \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow 2(n^2-n+8) \geqslant (n+5)(n+4) \text{car } (n+5)(n+4) > 0 \text{ et } 2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow 2n^2-2n+16 \geqslant n^2+9n+20 \\ &\Longleftrightarrow n^2-11n-4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \times (-4) = 121 + 16 = 137$
Donc $n_1 = \frac{11-\sqrt{137}}{2}$ et $n_2 = \frac{11+\sqrt{137}}{2}$.
Pour $n \geqslant 0$, l'inégalité est vérifiée pour $n \geqslant n_2$.
Or $144 \leqslant 137 \leqslant 169$ (et la racine carrée est croissante) donc $12 \leqslant \sqrt{137} \leqslant 13$, donc n étant entier, $n \geqslant n_2$ est équivalent à $n \geqslant \frac{11+13}{2}$ soit $n \geqslant 12$.
Donc $\boxed{\text{à partir de 12 boules, la probabilité que les deux boules piochées soient de même couleur est plus grande que } \frac{1}{2}.}$

Répartition des notes.