Correction du DS n^o 4

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie au rang 0 :
$u_0 = 1$ et $1 \geqslant \frac{1}{2}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \geqslant \frac{1}{2}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}$.

Par hypothèse de récurrence, $u_k \geqslant \frac{1}{2}$ donc $7u_k \geqslant 7 \times \frac{1}{2}$ donc $7u_k - 2 \geqslant \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$.
Or $u_{k+1} = 7u_k - 2$ donc $u_{k+1} \geqslant \frac{3}{2} \geqslant \frac{1}{2}$ CQFD.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \frac{1}{2}}$.

2. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété $v_n = \dfrac{2}{2n+1}$. Démontrons que cette propriété est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire $v_0 = \frac{2}{2\times 0+1}$.
$v_0 = 2$ et $\frac{2}{2\times 0+1} = \frac{2}{1} = 2$ donc l'égalité est vraie.

Hérédité : Soit k un entier quelconque fixé.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $v_k = \frac{2}{2k+1}$.
On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $v_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)+1}$.

On sait que $v_{k+1} = \frac{v_k}{1+v_k}$, et par hypothèse de récurrence, $v_k = \frac{2}{2k+1}$, donc :
$v_{k+1} = \dfrac{\frac{2}{2k+1}}{1+\frac{2}{2k+1}} = \dfrac{\frac{2}{2k+1}}{\frac{2k+1+2}{2k+1}} = \dfrac{2}{2k+1+2} = \dfrac{2}{2(k+1)+1}$ CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{2n+1}}$.

Exercice 2. Solutions seulement, le cours est à retravailler !

1. $\mathcal{S} = \{3e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{3}} \mid k \in [\![0,2]\!]\}$

2. $\mathcal{S} = \{2e^{i\frac{3\pi}{16}+\frac{2ik\pi}{4}} \mid k \in [\![0,3]\!]\}$

3. $\mathcal{S} = \{3-5i, 3+5i\}$

4. $\Delta = 2 + \frac{3}{2}i$ et on peut prendre $\delta = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ (ou $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$) alors $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2} + i \text{ , } -1 + \frac{1}{2}i\}$

Exercice 3.

1. $d(B,\mathcal{D}) = \frac{|2\times 2+2-2|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{|4|}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{5}}}$

2. A est sur l'axe des abscisses, donc son ordonnée vaut 0, et A est sur $\mathcal{D}$ donc, en notant x son abscisse, $2x + 0 - 2 = 0$ soit $x = 1$.
Donc $\boxed{A \text{ a pour coordonnées } (1,0)}$.

Autre rédaction possible : le point de coordonnées $(1,0)$ a son ordonnée nulle donc il est sur l'axe des abscisses, de plus, $2 \times 1 + 0 - 2 = 2 - 2 = 0$ donc ce point est sur la droite $\mathcal{D}$.
Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } A \text{ sont bien } (1,0)}$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$, donc c'est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$.

Donc $M(x,y) \in \mathcal{D}_1 \Longleftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n}] = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - 2y - 1 = 0$

$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{D}_1 \text{ est } x - 2y - 1 = 0.}$

On peut aussi utiliser le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *qui est directeur de* $\mathcal{D}$ *donc normal à* $\mathcal{D}_1$.

4. Soit I le milieu de $[AB]$: $I(\frac{1+2}{2}; \frac{0+2}{2})$ soit $I(\frac{3}{2}; 1)$.

$M \in \mathcal{D}_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y - 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - \frac{3}{2} + 2(y-1) = 0 \Longleftrightarrow x + 2y - \frac{7}{2} = 0$

$\boxed{\text{Une équation de } \mathcal{D}_2 \text{ est } x + 2y - \frac{7}{2} = 0.}$

5. Les coordonnées de Ω sont la solution du système $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x + 2y - \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$.

On trouve $\boxed{\Omega(\frac{9}{4}, \frac{5}{8})}$.

Le rayon de ce cercle est ΩB.
Or $\Omega B^2 = (2 - \frac{9}{4})^2 + (2 - \frac{5}{8})^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{125}{64}$.
Donc une équation de ce cercle est $\boxed{\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{125}{64}}$.
<u>Intepr\u00e9tations géométriques :</u>
• Ω est sur la médiatrice de $[AB]$, donc $\Omega A = \Omega B$ donc le cercle (de centre Ω) passe aussi par A.
• Ω est sur $\mathcal{D}_1$ qui est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ donc $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à (ΩA).
De plus, $\mathcal{D}$ passe par A.
Donc $\mathcal{D}$ est tangente au cercle en A.
Ainsi, $\boxed{\text{ce cercle passe par les points } A \text{ et } B \text{ et est tangent à } \mathcal{D} \text{ en } A}$.

Exercice 4.

1. $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$
$y^2 - 2y = y^2 - 2y + 1 - 1 = (y-1)^2 - 1$.
Donc $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 - 4 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.
Donc $\boxed{\text{le cercle } \mathcal{C} \text{ a pour centre } \Omega(2,1) \text{ et pour rayon } R = \sqrt{5}}$.

2. $M \in d_m \Longleftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}] = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ y+2 & m \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow m(x-3) - (y+2) = 0$

$\Longleftrightarrow mx - y - 3m - 2 = 0$

Une équation de d_m est $\boxed{mx - y - 3m - 2 = 0}$.

3. $\delta_m = \dfrac{|m \times 2 - 1 - 3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = \boxed{\dfrac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}}}$.

4.
$$\begin{aligned} d_m \text{ est tangente au cercle } \mathcal{C} &\Longleftrightarrow \delta_m = \sqrt{5} \\ &\Longleftrightarrow \delta_m^2 = 5 \quad \text{car } \delta_m \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow (-m-3)^2 = 5(m^2+1) \\ &\Longleftrightarrow m^2 + 6m + 9 - 5m^2 - 5 = 0 \\ &\Longleftrightarrow -4m^2 + 6m + 4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow -2m^2 + 3m + 2 = 0 \end{aligned}$$
Pour ce polynôme, $\Delta = 25$ et $m = 2$ ou $-\frac{1}{2}$.
Donc $\boxed{\text{pour } m = 2 \text{ et } m = -\frac{1}{2}, d_m \text{ est tangente au cercle } \mathcal{C}}$.
pour $m = 2$: $\boxed{d_2 : 2x - y - 8 = 0}$
pour $m = -\frac{1}{2}$: $\boxed{d_{-\frac{1}{2}} : -\frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2} = 0}$

Exercice 5.

1. La solution du système est $(\frac{8}{3}; 15; \frac{61}{3})$.

2. On cherche un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifiant $P(-4) = 3$, $P(-1) = 8$ et $P(-2) = 1$.
Or $P(-4) = 3 \iff 16a^2 - 4b + c = 3$.
$P(-1) = 8 \iff a - b + c = 8$ et $P(-2) = 1 \iff 4a^2 - 2b + c = 1$.
a, b et c devant vérifier ces trois conditions, sont solution du système étudié en **1.**.
Il y a donc un unique polynôme satisfaisant ces critères : $P(x) = \frac{8}{3}x^2 + 15x + \frac{61}{3}$.

Exercice 6.

1. Si $\alpha = 0$: alors l'équation est $y'' = 0$.
Alors y' est constante : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, L], y'(x) = \lambda$.
Et donc $\exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, L], y(x) = \lambda x + \mu$.

On peut aussi appliquer le théorème du cours : l'équation caractéristique est $r^2 = 0$, il y a une racine, $r = 0$ donc les solutions sont de la forme $x \mapsto \mu e^{0x} + \lambda x e^{0x}$ c'est-à-dire $x \mapsto \lambda x + \mu$.

$y(0) = 0 \iff \mu = 0$ et alors $y(x) = \lambda x$ donc $y(L) = 0 \iff \lambda = 0$.
Donc la seule fonction solution du problème est la fonction nulle.

2. Si $\alpha < 0$: l'équation caractéristique est $r^2 + \alpha = 0$ donc $r_1 = \sqrt{-\alpha}$ et $r_2 = -\sqrt{-\alpha}$.
Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{-\alpha}x} + \mu e^{-\sqrt{-\alpha}x}$.
Si de plus $y(0) = 0$, alors $\lambda + \mu = 0$ donc $\lambda = -\mu$.
Alors $y(L) = \lambda\left(e^{\sqrt{-\alpha}L} - e^{-\sqrt{-\alpha}L}\right)$.
Or $\sqrt{-\alpha} \neq 0$ donc $e^{\sqrt{-\alpha}L} \neq e^{-\sqrt{-\alpha}L}$ (car exp est injective), donc $e^{\sqrt{-\alpha}L} - e^{-\sqrt{-\alpha}L} \neq 0$ donc $\lambda = 0$.
Donc la seule fonction possible est encore la fonction nulle.

3. (a) Les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = i\sqrt{\alpha}$ et $r_2 = -i\sqrt{\alpha}$.
Donc les solutions réelles sont $y(x) = \lambda \cos(\sqrt{\alpha}x) + \mu \sin(\sqrt{\alpha}x)$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
Alors $y(0) = \lambda$ et on veut $y(0) = 0$ donc $\lambda = 0$.
Donc $y(x) = \mu \sin(\sqrt{\alpha}x)$ donc $y(L) = \mu \sin(\sqrt{\alpha}L)$.
Si $\sin(\sqrt{\alpha}L) \neq 0$, alors $\mu = 0$ donc la seule solution sera la fonction nulle.
Donc avoir une solution non nulle nécessite $\sin(\sqrt{\alpha}L) = 0$, et cela suffit car alors n'importe quel μ non nul convient.
Or $\sin(\sqrt{\alpha}L) = 0 \iff \sqrt{\alpha}L$ est un multiple de π.
$\sqrt{\alpha}L > 0$ donc $\sin(\sqrt{\alpha}L) = 0$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{\alpha}L = n\pi$ c'est-à-dire $\alpha = n^2 \frac{\pi^2}{L^2}$.

$\boxed{\text{Le problème a une solution non nulle si et seulement si } \alpha = n^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*}$.

(b) $\omega = 2\pi \times 440$ donc $\alpha = \frac{(2\pi)^2 \times 440^2}{440^2} = 4\pi^2$.
Donc $1^2 \frac{\pi^2}{L^2} = 4\pi^2$ donc $L^2 = \frac{1}{4}$ et $L > 0$ donc $L = \frac{1}{2}$.
Donc $\boxed{\text{la longueur de la corde pour obtenir un La dans les conditions de ce problème est 50cm}}$.

Exercice 7.

Attention : *Respecter le nom de la variable donné dans l'énoncé, ici t et non x !*

1. (a) $y' = \dfrac{y}{4} \iff y' - \frac{1}{4}y = 0$
Une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{4}$ est $t \mapsto -\frac{1}{4}t$.
Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{\frac{1}{4}t}$, avec $t \in \mathbb{R}$.
g est solution de (E_1) donc $g(t) = \lambda e^{\frac{1}{4}t}$.
Or $g(0) = 1$ et $\lambda e^{\frac{1}{4} \times 0} = \lambda$ donc $\lambda = 1$ donc $\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad g(t) = e^{\frac{1}{4}t}}$.

(b) $g(t) > 3 \iff e^{\frac{1}{4}t} > 3$

$\iff \frac{1}{4}t > \ln(3)$ car la fonction ln est strictement croissante

$\iff t > 4\ln(3)$

Et $4\ln(3) \approx 4,4$ donc la population dépassera les 300 rongeurs pour la première fois à partir d'environ 4,4 ans (4 ans et 5 mois).

2. (a) Puisque $h = \frac{1}{u}$, alors $h' = -\frac{u'}{u^2}$.

Ainsi, h vérifie $(\mathrm{E}_3) \iff \forall t \in \mathbb{R}^+,\ h'(t) + \frac{1}{4}h(t) = \frac{1}{12}$ et $h(0) = 1$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}^+,\ -\frac{u'(t)}{(u(t))^2} + \frac{1}{4u(t)} - \frac{1}{12} = 0$ et $\frac{1}{u(0)} = 1$

Or $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) \neq 0$ donc on peut multiplier l'égalité par $-(u(t))^2$, ainsi :

h vérifie $(\mathrm{E}_3) \iff \forall t \in \mathbb{R}^+,\ u'(t) - \frac{u(t)}{4} + \frac{\left(u(t)\right)^2}{12} = 0$ et $u(0) = 1$

$\boxed{h \text{ vérifie } (\mathrm{E}_3) \iff u \text{ vérifie } (\mathrm{E}_2)}$

(b) *Résoudre (E_2), en recherchant une solution particulière sous forme d'une constante.*

On trouve $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $h(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$.

Alors $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ u(t) = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2e^{-\frac{t}{4}} + 1}}$

(c) u est dérivable sur $[0, +\infty[$ car son dénominateur est dérivable et ne s'annule pas.

Et $\forall t \geqslant 0, u'(t) = 3\dfrac{-2 \times (-\frac{1}{4})e^{-\frac{t}{4}}}{(2e^{-\frac{t}{4}} + 1)^2} = \frac{3}{2}\dfrac{e^{-\frac{t}{4}}}{(2e^{-\frac{t}{4}} + 1)^2}$.

Cette expression est toujours positive car l'exponentielle et le carré sont à valeurs positives.

Donc la population va sans cesse augmenter.

De plus, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{4}} = 0$ donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 3$.

Ainsi, $\boxed{\text{la population va augmenter et se stabiliser autour de 300 individus}}$.