Devoir Surveillé n°3

Samedi 11 janvier, 8h - 12h

Calculatrice interdite.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 (e^{2x} + x^2)\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{2t-3}\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 2.

1. Déterminer la forme trigonométrique de $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}$.

En déduire les valeurs de n pour lesquelles le nombre $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est un réel positif.

2. Soit z un nombre complexe d'argument θ, déterminer un argument de $\dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{\overline{z}^2}$ en fonction de θ.

Exercice 3.

1. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{17}(2k-7)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{p=3}^{12}\left(\frac{1}{2^p} + p\right)$.

2. **(a)** Montrer que pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2(k-1)} - \dfrac{1}{2(k+1)}$

(b) Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$.

3. Dans cette question, i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k = 2^{\frac{n}{2}} e^{n\frac{i\pi}{4}}$.

4. Montrer, sans récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 4^k = 2^{n(n+1)}$.

5. Montrer par récurrence, que pour tout n supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1}(2j+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Exercice 4.

Résoudre les équations différentielles suivantes, en cherchant les solutions parmi les fonctions à valeurs réelles : **(a)** $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$ **(b)** $y'' - 2y' + 5y = 3$

Exercice 5.

On donne les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \approx 0{,}7$; $\ln(3) \approx 1{,}1$; $\ln(10) \approx 2{,}3$.

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs.
La taille de la population au temps t, est notée $g(t)$: la variable réelle t désigne le temps, exprimé en années et l'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. À la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, ce qui signifie que $g(0) = 1$.
Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g la solution du problème de Cauchy (E_1) : $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{4}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

(a) Trouver l'expression de la fonction g.

(b) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ? On donnera la valeur exacte simplifiée, puis on calculera une valeur approchée à l'aide des valeurs données au début de l'énoncé.

2. En réalité, dans le secteur observé, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de centaines de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, est solution du problème de Cauchy :

$$(\mathrm{E}_2) \quad \begin{cases} y' - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

(a) On suppose que, pour tout réel t, on a $u(t) > 0$ et on considère la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$.
Démontrer que la fonction u est solution de (E_2) si et seulement si la fonction h est solution de (E_3) avec :

$$(\mathrm{E}_3) \quad \begin{cases} z' + \dfrac{1}{4}z - \dfrac{1}{12} = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases} .$$

(b) Résoudre (E_3) et en déduire l'expression de la fonction u.

(c) Déterminer les variations et la limite de u en $+\infty$, puis interpréter dans ce modèle l'évolution de la population de rongeurs.

Exercice 6.

1. Étudier la parité des fonctions suivantes. On admet qu'elles sont définies sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = \sin(5x) + x\cos(x)$ $g(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$ $h(x) = 5(x-3)^2$.

2. On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x + 2}$.
Démontrer que la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - 2$ est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

Exercice 7.

1. On définit la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - 1 \end{array}$.

(a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

(b) Construire le tableau des variations de g en faisant figurer les limites et en calculant les extrema éventuels.
g est-elle majorée ? minorée ?

(c) Justifier que g réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans un intervalle à préciser.
En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $[-1, +\infty[$ que l'on notera α.
Calculer $g(0)$ et en déduire que $\alpha > 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln(x)$.

(a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

(b) Démontrer que f' vérifie, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

(c) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$, tangente à la courbe de f en $x = 1$.

(d) Justifier que α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

3. On précise que $\alpha \approx 0,5$.
Tracer l'allure de la représentation graphique de f.