Corrigé du DS n°3

Correction 1.

$I_1 = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}}$

$I_2 = \left[\frac{1}{2} \times \ln(|2t-3|)\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\ln(|-1|) - \frac{1}{2}\ln(|-5|) = \boxed{-\frac{1}{2}\ln(5)}$

$I_3 = \left[-\frac{1}{2}(\cos(x))^2\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{-\frac{1}{8}}$

Correction 2.

1. $1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $(1-i\sqrt{3})^5 = 2^5 e^{-i\frac{5\pi}{3}}$

$1 - i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1-i)^3 = \sqrt{2}^3 e^{-3i\frac{\pi}{4}}$.

Donc $\boxed{\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3} = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}}$.

Donc $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n = (8\sqrt{2})^n e^{-i\frac{11n\pi}{12}}$, ce nombre un réel positif si et seulement si $-\frac{11n\pi}{12}$ est un multiple de 2π, c'est-à-dire $\underline{n \text{ multiple de } 24}$.

2. $-2\sqrt{3} + 2i = 4(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 4e^{5i\frac{\pi}{6}}$

Donc $\arg(-2\sqrt{3}+2i) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$, et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi] = -\theta\ [2\pi]$, donc $\arg(\overline{z}^2) = -2\theta\ [2\pi]$.

Donc $\arg\left(\frac{-2\sqrt{3}+2i}{\overline{z}^2}\right) = \frac{5\pi}{6} - (-2\theta)\ [2\pi] = \boxed{\frac{5\pi}{6} + 2\theta\ [2\pi]}$.

Correction 3.

1.

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\sum_{k=0}^{17} k + \sum_{k=0}^{17} 7 \\ &= 2 \times \tfrac{17\times 18}{2} - 7 \times (17+1) \\ &= 17 \times 18 - 7 \times 18 \\ &= 10 \times 18 \\ &= \boxed{180} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{p=3}^{12} \frac{1}{2^p} + \sum_{p=3}^{12} p \\ &= \sum_{p=3}^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^p + \sum_{p=3}^{12} p \\ &= \frac{1}{2^3} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{12-3+1}}{1 - \frac{1}{2}} + (12-3+1)\frac{3+12}{2} \\ &= \frac{1}{2^3} \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} + 10 \times \tfrac{15}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{1024}\right) + 75 \\ &= \boxed{\frac{1023}{4096} + 75} \end{aligned}$$

2. **(a)** $\frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{k+1-(k-1)}{2(k-1)(k+1)} = \frac{2}{2(k^2-1)} = \frac{1}{k^2-1}$, donc $\boxed{\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{k^2-1}}$.

(b) Donc, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{\ell=3}^{n+1} \frac{1}{\ell}\right)$$

avec $p = k-1$: k va de 2 à n, p va de 1 à $n-1$; et $\ell = k+1$: k va de 2 à n, ℓ va de 3 à $n+1$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{p=3}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{\ell=3}^{n-1} \frac{1}{\ell} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n^2+n}\right)$$

$$= \boxed{\frac{3n^2 - n - 2}{4n^2 + 4n}}$$

3. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k 1^{n-k}\\ &= (i+1)^n \quad \text{(d'après la formule du binôme de Newton)}\\ &= (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n\\ &= (2^{\frac{1}{2}})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}\\ &= \boxed{2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{n\pi}{4}}}\end{aligned}$$

4. $$\prod_{k=0}^{n}4^k = 4^{\sum_{k=0}^{n}k} = 4^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{n(n+1)} = 2^{n(n+1)}$$

5. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1}(2j+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

$$\prod_{j=1}^{2-1}(2j+1) = 2\times 1+1 = 3$$

$$\frac{(2\times 2)!}{2^2 2!} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{4\times 2\times 1} = 3$$

Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1}(2j+1) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{k}(2j+1) &= \prod_{j=1}^{k-1}(2j+1)\times(2k+1)\\ &= \frac{(2k)!}{2^k k!}\times(2k+1) \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{2^k k!(2k+2)}\\ &= \frac{(2k+2)!}{2^k k! 2(k+1)}\\ &= \frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}(k+1)!} \quad \text{CQFD}\end{aligned}$$

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n \geqslant 2, \displaystyle\prod_{j=1}^{n-1}(2j+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}}$.

Correction 4.

(a) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$

- ⋆ équation homogène : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
  équation caractéristique : $r^2 + 3r + 2 = 0$
  $\Delta = 9 - 8 = 1$ les deux racines sont $r_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$.
  Solutions de l'équation homogène : $y_{\mathcal{H}}(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.
- ⋆ recherche d'une solution particulière sous la forme $y_p(x) = mxe^{-2x}$:
  alors $y_p'(x) = me^{-2x} - 2mxe^{-2x}$ et $y_p''(x) = -4me^{-2x} + 4mxe^{-2x}$.
  Donc $\forall x \in \mathbb{R}, y_p''(x) + 3y_p'(x) + 2y_p(x) = (4mx - 6mx + 2mx)e^{-2x} + (-4m + 3m)e^{-2x} = -me^{-2x}$
  On voudrait obtenir e^{-2x} donc $m = -1$ convient.
  Donc $y_p(x) = -xe^{-2x}$ est une solution de l'équation.
- ⋆ solution générale : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\ x \ \mapsto \ \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} - xe^{-2x}\ ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}}$

(b) $\star$ équation homogène : $y'' - 2y' + 5y = 0$.
équation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$.
Alors $\Delta = 4 - 4 \times 5 = -16$
$r_1 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$ et $r_2 = 1 + 2i$
$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{t \to e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

$\star$ solution particulière : $y_p(t) = \frac{3}{5}$

$\star$ solution générale : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{t \to e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) + \frac{3}{5},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Correction 5.

1. (a) $y' = \dfrac{y}{4} \iff y' - \frac{1}{4}y = 0$ donc les solutions sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{\frac{1}{4}t}$, avec λ une constante réelle.
Or $g(0) = 1$ et $\lambda e^{\frac{1}{4}\times 0} = \lambda$ donc on prend $\lambda = 1$ et donc $\boxed{g(t) = e^{\frac{1}{4}t}}$.

(b) $g(t) > 3 \iff e^{\frac{1}{4}t} > 3$
$\iff \frac{1}{4}t > \ln(3)$ car la fonction ln est strictement croissante
$\iff t > 4\ln(3)$
Et $4\ln(3) \approx 4,4$ donc la population dépassera les 300 rongeurs pour la première fois à partir d'environ 4,4 ans (4 ans et 5 mois).

2. (a) Puisque on considère que u ne s'annule pas et que $h = \frac{1}{u}$, alors $h' = -\frac{u'}{u^2}$.
Ainsi, h solution de $(\mathrm{E}_3) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + \frac{1}{4}h(t) = \frac{1}{12}$ et $h(0) = 1$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ -\frac{u'(t)}{(u(t))^2} + \frac{1}{4u(t)} - \frac{1}{12} = 0$ et $\frac{1}{u(0)} = 1$

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) \neq 0$ donc on peut multiplier l'égalité par $-(u(t))^2$, ainsi :
h solution de $(\mathrm{E}_3) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) - \frac{1}{4}u(t) + \frac{1}{12}\big(u(t)\big)^2 = 0$ et $u(0) = 1$

$$\boxed{h \text{ solution de } (\mathrm{E}_3) \iff u \text{ solution de } (\mathrm{E}_2)}$$

(b) • $z' + \dfrac{1}{4}z - \dfrac{1}{12} = 0 \iff z' + \dfrac{1}{4}z = \dfrac{1}{12}$

les solutions de cette équation sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$ (car $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$).

• En $t = 0$, $\lambda e^{-\frac{1}{4}\times 0} + \frac{1}{3} = \lambda + \frac{1}{3}$ et on veut obtenir 1 donc $\lambda = \frac{2}{3}$.
Ainsi, $\boxed{h : t \mapsto \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3} \text{ est la solution de } (E_3)}$.
Alors $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2e^{-\frac{t}{4}} + 1}}$

(c) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et à valeurs strictement positives de sorte que le dénominateur ne s'annule pas.
$\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = \dfrac{-3 \times 2 \times (-\frac{1}{4})e^{-\frac{1}{4}t}}{(2e^{-\frac{t}{4}} + 1)^2} = \dfrac{3e^{-\frac{1}{4}t}}{2(2e^{-\frac{t}{4}} + 1)^2} > 0$.
Donc $\boxed{u \text{ est strictement croissante}}$.
$\lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{1}{4}t = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{4}t} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$
Donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 3}$.
Donc ici, $\boxed{\text{la population de rongeurs va grandir, et se stabiliser autour de 300 individus}}$.

Correction 6.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \sin(-5x)+(-x)\cos(-x) = -\sin(5x)-x\cos(x) = -(\sin(5x)+x\cos(x)) = -f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) &= -x+2-2\ln(e^{-x}+1)\\ &= -x+2-2\ln\left(e^{-x}(1+e^{x})\right)\\ &= -x+2-2\ln(e^{-x})-2\ln(1+e^{x})\\ &= -x+2-2\times(-x)-2\ln(e^{x}+1)\\ &= x+2-2\ln(e^{x}+1)\\ &= g(x) \qquad \text{donc } \boxed{g \text{ est paire}}.\end{aligned}$$

$h(1) = 5\times(1-3)^2 = 5\times 4 = 20$ et $h(-1) = 5(-1-3)^2 = 5\times 16 = 80$.

$h(1) \neq h(-1)$ donc $\boxed{h \text{ n'est pas paire}}$ et $h(-1) \neq -h(1)$ donc $\boxed{h \text{ n'est pas impaire}}$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{2(x+1)^2}{(x+1)^2-2(x+1)+2}-2 \quad .\\ &= \frac{2(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1-2x-2+2}-2\\ &= \frac{2x^2+4x+2-2(x^2+1)}{x^2+1}\\ &= \frac{4x}{x^2+1}\end{aligned}$$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(-x) = \frac{4\times(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{4x}{x^2+1} = -g(x)$, donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

Donc la courbe de g est symétrique par rapport à l'origine.

Or la courbe de g se déduit de celle de f par deux translations : l'une de vecteur $-\overrightarrow{\imath}$ et l'autre de vecteur $-2\overrightarrow{\jmath}$, donc la courbe de f se déduit de celle de g par la translation de vecteur $\overrightarrow{\imath}+2\overrightarrow{\jmath}$.

Donc $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est symétrique par rapport au point } A(1,2)}$.

Correction 7.

1. **(a)** ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par le théorème des croissances comparées, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1}$.

⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ (produit) donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions usuelles dérivables).
Et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.
De plus, pour tout x, e^x est strictement positif donc $g'(x)$ est du même signe que $1+x$.
Donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-\frac{1}{e}-1$	↗	$+\infty$

$g(-1) = -e^{-1}-1 = -\frac{1}{e}-1$

$\boxed{g \text{ n'est pas majorée}}$

$\boxed{g \text{ est minorée (par } -2 \text{ notamment)}}$

(c) g est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$
et d'après le tableau des variations $g([-1,+\infty[) = [-e^{-1}-1,+\infty[$
donc $\boxed{g \text{ est une bijection de } [-1,+\infty[\text{ dans } [-e^{-1}-1,+\infty[}$.
$0 \in [-e^{-1}-1,+\infty[$ (car $-e^{-1}-1<0$) donc 0 a un unique antécédent par g dans $[-1,+\infty[$, autrement dit $\boxed{\text{l'équation } g(x)=0 \text{ a une unique solution sur } [-1,+\infty[}$.
$g(0) = -1$ donc $g(0) < g(\alpha)$.
Or g est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ donc $\boxed{0 < \alpha}$.

2. (a) ⋆ $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$ (différence de limites usuelles)

⋆ $f(x) = e^x\left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x}\right)$:

– $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

– par le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 1$

Donc par produit, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

(b) f est dérivable (différence de fonctions usuelles dérivables).

Et pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x-1}{x} = \boxed{\frac{g(x)}{x}}$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

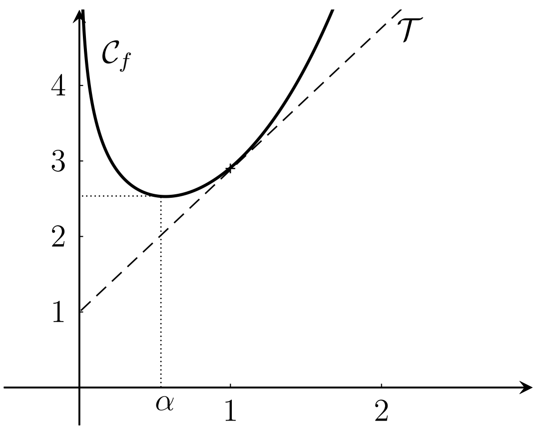
$x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
Or g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et s'annule en α, elle est donc négative pour $x \in]0,\alpha[$ et positive sur $]\alpha,+\infty[$.

(c) $\mathcal{T}$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
$f(1) = e^1 - \ln(1) = e$ et $f'(1) = \frac{g(1)}{1} = e - 1$.
Donc $\mathcal{T} : y = (e-1)(x-1) + e$ soit $\boxed{\mathcal{T} : y = (e-1)x + 1}$.

(d) α est la solution de $g(x) = 0$ sur $]-1,+\infty[$ donc $g(\alpha) = 0$ soit $\alpha e^\alpha - 1 = 0$ donc $\boxed{e^\alpha = \frac{1}{\alpha}}$.

Alors, $f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln(\frac{1}{e^\alpha}) = \frac{1}{\alpha} + \ln(e^\alpha) = \boxed{\frac{1}{\alpha} + \alpha}$

3.



$\alpha \approx 0,5$ donc $f(\alpha) \approx \frac{1}{0,5} + 0,5 \approx 2,5$