Nom - Prénom :

Devoir Surveillé n° 2

samedi 21 novembre 8h-12h

Calculatrice et « cercles trigos » interdits.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
La notation prendra en compte la présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction (lexique, syntaxe).
La clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

1. Parmi les ensembles suivants, cocher ceux qui sont égaux à $\{0\}$:

☐ $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leqslant 1\}$ ☐ $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall m \in \mathbb{N},\, n < m\}$

☐ $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 2 \text{ et } n \text{ est pair}\}$ ☐ $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 + n = 1\}$

☐ $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall m \in \mathbb{N},\, n \leqslant m\}$ ☐ $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n^2 \leqslant 0\}$

2. Vrai ou Faux ?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} (-3)^k = \frac{1+3^8}{1+3}$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

(b) f est une application de E dans F.

Si f n'est pas injective, alors il existe deux éléments distincts de E ayant la même image.
☐ Vrai ☐ Faux

Si f n'est pas bijective, alors au moins un élément de F n'a pas d'antécédent.
☐ Vrai ☐ Faux

Si f est surjective et non bijective, alors tout élément de F a au moins deux antécédents par f.
☐ Vrai ☐ Faux

(c) $\forall x \in [0, 2\pi[,\ \cos(2x) = 2\cos(x)$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

$\forall x \in \mathbb{R},\ \arccos(\cos(x)) = x$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

3. f étant une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, traduire par des quantificateurs :

(a) 17 est un minorant de f.

....

(b) f n'est pas la fonction nulle.

....

(c) L'équation $f(x) = 4$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

....

Exercice 2.

1. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{17}(2k-7)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{p=3}^{12}\left(\frac{1}{2^p}+p\right)$.

2. Exprimer les produits suivants (en fonction de n, et de $n!$) : $P_1(n) = \displaystyle\prod_{k=8}^{n+1}(k-1)$ et $P_2(n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k)^2$.

3. Soit n un entier non nul, démontrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1}-1}{6}$.

4. Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 quatre nombres. Écrire à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ les quantités suivantes.

(a) $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$.

(b) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.

(c) $a_1(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4)$.

5. **(a)** Montrer que pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2(k-1)} - \dfrac{1}{2(k+1)}$

(b) Pour $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$.

(c) Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(*on procède avec n comme si c'était x*)

Exercice 3.

1. f est une application de E dans F.
Rappeler les définitions précises de :

(a) f est injective ;

(b) f est surjective ;

(c) f est bijective.

2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \mapsto & \frac{x+2}{3-x} \end{array}$.
Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

3. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 3n+2 \end{array}$.
Montrer que g est injective et non surjective.

4. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [2,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{4+x^2} \end{array}$.
Montrer que h n'est pas injective et que h est surjective.

Exercice 4.

Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :
$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n+1$ et $g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$.

1. Déterminer $f([\![0;4]\!])$, $f^{-1}([\![-2;3]\!])$ et $g([\![0;4]\!])$ et $g^{-1}([\![1,3]\!])$.

2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.

3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 5.

On note $f(x) = \arctan(x + \frac{1}{x})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.

2. Étudier la parité de la fonction f, en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $]0, +\infty[$ et expliquer comment reconstituer la courbe à partir de cette partie.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

4. Construire le tableau de variation complet de f sur $]0, +\infty[$.
f est-elle majorée ? minorée ? bornée ?

5. Avec tous les éléments dont vous disposez, tracer l'allure de la courbe représentative de f sur son ensemble de définition.

Exercice 6.

On considère la fonction f déterminée sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction f et de la représenter relativement à un repère orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité choisie étant le centimètre.

Partie A : Étude d'une fonction g auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$.

1. Soit P la fonction polynôme déterminée par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

- **(a)** Montrer que P n'est ni paire ni impaire.
- **(b)** Factoriser P (on pourra commencer par en chercher une racine évidente).
- **(c)** Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire pour tout x de $]0; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$.

3. En déduire les variations de g sur son domaine d'étude.
Calculer $g(1)$ et en déduire que pour tout x de $]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.
Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f ?

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3.
- **(a)** Démontrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
- **(b)** En déduire les variations de f.
- **(c)** Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f en $x = 1$.

4. Tracer $\mathcal{T}$ et donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

5. Justifier que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
Construire le tableau des variations complet de sa réciproque f^{-1}.

EXERCICE BONUS : On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)$.

1. Montrer que f est périodique.

2. Justifier f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

4. Calculer $f(0)$ et $f(\pi)$ et en déduire une expression de f sur chacun des intervalles précédents.

5. Tracer l'allure de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.