Nom - Prénom :

Devoir Surveillé n° 1
samedi 3 octobre 8h-11h

Calculatrice interdite.

Questions de cours :

1. Déterminant dans le plan :

(a) définition du déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

....

....

(b) propriété fondamentale :

....

(c) expression de $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

....

2. Définition du produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

....

....

....

....

3. $z = a + ib$ est un nombre complexe, qu'est-ce que le module de z ? que représente-t-il dans le plan complexe ?

....

....

4. A et B sont des points du plan d'affixes respectives z_A et z_B.

affixe du milieu de $[AB]$: ....

$AB =$ ....

Exercice 1. Calculs.

1. Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$ et $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tels que l'angle orienté $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ soit égal à $-\frac{\pi}{4}$, et $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 5$. Calculer $[2\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}; \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}]$.

3. Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

4. On considère les trois nombres complexes suivants :

$$z_1 = -2 + 3i \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3} - 4i \quad ; \quad z_3 = 1 - i.$$

Écrire sous forme algébrique les nombres $A = i(z_1)^2 - 3\overline{z_2}$; $B = \overline{z_2 \times z_3 - 3iz_1}$ et $C = \dfrac{z_1}{z_3}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ (les résultats seront donnés sous forme algébrique) :

(a) $z + 4 = 3i(\overline{z} - 2)$ **(b)** pour $z \neq 2$: $\frac{3z+1}{z-2} = 2i$

Exercice 2.

1. Déterminer, en justifiant, les ensembles de définition des fonctions suivantes :
$f(x) = \ln(-3x+12)$ $\qquad g(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$ $\qquad h(x) = \frac{1}{x^2} \times e^x$.

2. On note $f(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$.

(a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.

(b) On rappelle que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.
Déterminer les variations de f.

3. On suppose que x est un réel tel que $-4 \leqslant x < 0$.
Donner l'encadrement le plus précis possible de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$.

Exercice 3.

Soit une fonction f définie sur $[-6;6]$ ayant pour tableau de variations :

x	-6		-1		0		1		6
$f(x)$	-10	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et le tableau de variation (sans justification).

1. $g : x \mapsto f(x)+2$ $\qquad$ **2.** $h : x \mapsto f(x-4)$ $\qquad$ **3.** $k : x \mapsto -3f(x)$ $\qquad$ **4.** $\ell : x \mapsto f(\frac{1}{2}x)$

Exercice 4.

1. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base du plan.
On définit trois vecteurs : $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) On note $\overrightarrow{u} = -3\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2} - 5\overrightarrow{v}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

(b) Montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base du plan. On la notera $\mathcal{B}'$.

(c) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ et de $\overrightarrow{\imath}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

2. Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan.
On considère les points suivants, définis par leurs coordonnées polaires : $A(2, \frac{\pi}{6})$, $B(3, \frac{\pi}{4})$ et $C(2, \frac{2\pi}{3})$.
Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}$.

Exercice 5.

1. **(a)** Déterminer la forme trigonométrique de $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}$.

En déduire la forme trigonométrique de $z_n = \left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ avec n un entier quelconque.

Pour quelle(s) valeur(s) de n le nombre z_n est-il un réel positif ?

(b) Soit z un nombre complexe d'argument θ, déterminer un argument de $\dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{\overline{z}}$ en fonction de θ.

2. A, B, C et D sont des points du plan complexe dont les affixes sont données par

$$z_A = \sqrt{3}+i, \quad z_B = 1+i\sqrt{3}, \quad z_C = -\sqrt{3}+i \quad \text{et} \quad z_D = 1-i\sqrt{3}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? justifier.

(a) $AD = BC$ $\qquad$ **(b)** $CD = (\sqrt{3}+2)AB$ $\qquad$ **(c)** Les diagonales de $ABCD$ sont perpendiculaires.