Correction du DS n° 1

❀❀ *marque des questions d'application directe du cours : entraînez-vous à les refaire. Il est également important de retravailler les questions de cours !*

Correction 1.

❀❀ **1.** $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5-(-3)\times 0 \\ -\big(2\times 5-(-3)\times(-6)\big) \\ 2\times 0 - 1\times(-6) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}}$

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1\times 0\times(-3) + (-6)\times 1\times(-2) + 2\times(-3)\times 5 - (-2)\times 0\times 2 - 5\times 1\times 1 \\ &\qquad -(-3)\times(-3)\times(-6) \\ &= 0+12-30+0-5+54 \\ &= 31\end{aligned}$$

$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 31}$

2. *Il s'agit d'un déterminant, et pas d'un produit scalaire !*

$$\begin{aligned}[2\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}; \tfrac{1}{3}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}] &= 2[\overrightarrow{u}; \tfrac{1}{3}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}] - 4[\overrightarrow{v}; \tfrac{1}{3}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}] \\ &= 2[\overrightarrow{u}; \tfrac{1}{3}\overrightarrow{u}] + 2[\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}] - 4\times\tfrac{1}{3}[\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u}] - 4[\overrightarrow{v}; \overrightarrow{v}] \\ &= 0 + 2\times\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) - \tfrac{4}{3}\times\|\overrightarrow{v}\|\times\|\overrightarrow{u}\|\sin(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) + 0 \\ &= 2\times 3\times 5\times\sin(-\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{4}{3}\times 5\times 3\times\sin(\tfrac{\pi}{4}) \\ &= -30\times\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 20\times\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \boxed{-25\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(*Remarque :* $[\overrightarrow{u}; \frac{1}{3}\overrightarrow{u}] = 0$ *car* $\overrightarrow{u}$ *et* $\frac{1}{3}\overrightarrow{u}$ *sont colinéaires.*)

3. *Pour démontrer une égalité, on ne commence pas par l'affirmer, on transforme un côté pour obtenir l'autre !*

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} \\ &= \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} \\ &= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} \\ &= 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)}$.

❀❀ **4.**

$$\begin{aligned}A &= i(-2+3i)^2 - 3(\sqrt{3}+4i) \\ &= i\big((-2)^2 + 2\times(-2)\times 3i + (3i)^2\big) - 3\sqrt{3} - 12i \\ &= i(4-12i-9) - 3\sqrt{3} - 12i \\ &= -5i + 12 - 3\sqrt{3} - 12i\end{aligned}$$

$\boxed{A = 12 - 3\sqrt{3} - 17i}$

$$\begin{aligned}B &= \overline{(\sqrt{3}-4i)(1-i) - 3i(-2+3i)} \\ &= \overline{\sqrt{3} - \sqrt{3}i - 4i + 4i^2 + 6i - 9i^2} \\ &= \overline{\sqrt{3} - 4 + 9 - \sqrt{3}i - 4i + 6i} \\ &= \overline{\sqrt{3} + 5 + (-\sqrt{3}+2)i}\end{aligned}$$

$\boxed{B = \sqrt{3} + 5 + (\sqrt{3}-2)i}$

$$C = \frac{-2+3i}{1-i} = \frac{(-2+3i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{-2-2i+3i+3i^2}{2} = \boxed{\frac{-5}{2} + \frac{1}{2}i}$$

❀❀ **5. (a)** On cherche z sous la forme $z = x+iy$, alors

$$\begin{aligned}z+4 = 3i(\overline{z}-2) &\iff x+iy+4 = 3i(x-iy-2) \\ &\iff x+4+iy = 3ix - 6i + 3y \\ &\iff (x+4-3y) + i(y-3x+6) = 0\end{aligned}$$

Un nombre complexe est nul si et seulement si les parties réelle et imaginaire sont nulles, ainsi :

$$z+4 = 3i(\overline{z}-2) \iff \begin{cases} x-3y+4 = 0 \\ -3x+y+6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y-4 \\ -3(3y-4)+y = -6 \end{cases}$$

Donc $z+4=3i(\overline{z}-2) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3y-4 \\ -8y & = & -18 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3\times\frac{9}{4}-4 \\ y & = & \frac{9}{4} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{11}{4} \\ y & = & \frac{9}{4} \end{array}\right.$.

$\boxed{\text{La solution est le nombre complexe } z=\frac{11}{4}+\frac{9}{4}i}$.

❀❀ **(b)** Pour tout x de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$, $\frac{3z+1}{z-2}=2i \Longleftrightarrow 3z+1=2i(z-2)$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow 3z+1=2iz-4i \\ &\Longleftrightarrow (3-2i)z=-4i-1 \\ &\Longleftrightarrow z=\frac{-1-4i}{3-2i} \end{aligned}$$

Donc $z=\frac{(-1-4i)(3+2i)}{3^2-(2i)^2}=\frac{-3-2i-12i-8i^2}{13}=\frac{5-14i}{13}$.

Ce résultat est bien différent de 2 donc $\boxed{\text{la solution de cette équation est } \frac{5}{13}-\frac{14}{13}i}$.

Correction 2.

❀❀ **1.**

- f est la composée d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par la fonction ln définie sur $]0,+\infty[$.
  Donc $\mathcal{D}_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3x+12>0\}$.
  Or $-3x+12>0 \Longleftrightarrow -3x>-12 \Longleftrightarrow x<4$.
  Donc $\boxed{\mathcal{D}_f=]-\infty,4]}$.
- g est la composée d'un produit de fonctions affines, défini sur $\mathbb{R}$, par la fonction racine carrée, définie sur $[0,+\infty[$.
  Donc $\mathcal{D}_g=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x+1)(x-3)\geqslant 0\}$.
  Or

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Donc $\boxed{\mathcal{D}_g=]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[}$.
- h est le produit de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$, définie sur $\mathbb{R}^*$ par la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.
  Donc $\boxed{\mathcal{D}_h=\mathbb{R}^*}$.

❀❀ **2.** **(a)** f est une fraction rationnelle, son dénominateur est $1-x$ et $1-x=0 \Longleftrightarrow x=1$.
Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{1\}}$.

(b) Pour $x\neq 1$, $f'(x)=\dfrac{2(1-x)-(2x+3)\times(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2-2x+2x+3}{(1-x)^2}=\dfrac{5}{(1-x)^2}$.
Donc pour tout x différent de 1, $f'(x)>0$.
Donc

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

3.

$$\begin{array}{ccccc|l} -4 & \leqslant & x & < & 0 & \text{on applique la fonction carré, strictement décroissante sur }]-\infty,0] \\ (-4)^2 & \geqslant & x^2 & > & 0 & +9 \\ 25 & \geqslant & x^2+9 & > & 9 & \text{on applique la fonction racine carré, strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ 5 & \geqslant & \sqrt{x^2+9} & > & 3 & \text{on applique la fonction inverse, strictement décroissante sur }]0,+\infty[\\ \frac{1}{5} & \leqslant & \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} & < & \frac{1}{3} & \end{array}$$

Donc, $\boxed{\text{si } -4\leqslant x<0, \text{ alors } \frac{1}{5}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}<\frac{1}{3}}$.

Correction 3.

1. $\boxed{\mathcal{D}_g = [-6, 6]}$.

x	-6		-1		0		1		6
$g(x)$			5				7		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-8				3				1

2. $\boxed{\mathcal{D}_h = [-2, 10]}$

x	-2		3		4		5		10
$h(x)$			3				5		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-10				1				-1

h est la composée de $x \mapsto x-4$ par f, elle est donc définie lorsque $x-4 \in \mathcal{D}_f$.
Autre vision : h est en retard sur f !

3. $\boxed{\mathcal{D}_k = [-6, 6]}$.

x	-6		-1		0		1		6
$k(x)$	30				-3				3
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			-9				-15		

4. $\boxed{\mathcal{D}_\ell = [-12; 12]}$.

x	-12		-2		0		2		12
$\ell(x)$			3				5		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-10				1				-1

même remarque que pour h : ℓ est définie pour les x tels que $\frac{x}{2} \in \mathcal{D}_f$!

Correction 4.

❀❀ **1. (a)** Dans la base $\mathcal{B}$: $\overrightarrow{u} = -3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-17\\4\end{pmatrix}$.

❀❀ **(b)** $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 4\end{vmatrix} = 2\times 4 - 3\times(-3) = 17 \neq 0$.

Donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \text{ est une base du plan}}$.

(c)
- Coordonnées de $\overrightarrow{v}$: on cherche x et y tels que $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2}$.
  $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2} \iff \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \iff \begin{cases}1 = 2x - 3y\\-1 = 3x + 4y\end{cases}$
  On trouve $x = \frac{1}{17}$ et $y = \frac{-5}{17}$, donc $\boxed{\text{les coordonnées de } \overrightarrow{v} \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ sont } (\tfrac{1}{17}, \tfrac{-5}{17})}$.
- Coordonnées de $\overrightarrow{\imath}$: on cherche x et y tels que $\overrightarrow{\imath} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2}$.
  $\overrightarrow{\imath} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2} \iff \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \iff \begin{cases}1 = 2x - 3y\\0 = 3x + 4y\end{cases}$
  On trouve $x = \frac{4}{17}$ et $y = \frac{-3}{17}$ donc $\boxed{\text{les coordonnées de } \overrightarrow{\imath} \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ sont } (\tfrac{4}{17}; \tfrac{-3}{17})}$.

2. • Dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, les coordonnées cartésiennes de A sont $(2\cos(\frac{\pi}{6}), 2\sin(\frac{\pi}{6}))$ soit $A(\sqrt{3}, 1)$.
Donc $\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} = \sqrt{3}$.

Autre méthode : $\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{\imath}\| \times \|\overrightarrow{OA}\| \cos(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OA}) = 1 \times 2 \times \cos(\frac{\pi}{6}) = 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

- Les coordonnées cartésiennes de B sont $(3\cos(\frac{\pi}{4}), 3\sin(\frac{\pi}{4}))$ soit $B(3\frac{\sqrt{2}}{2}; 3\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Donc $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{3\frac{\sqrt{2}}{2}}$

- Et avec le même principe pour C, on a $C(-1, \sqrt{3})$.

Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 - 3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{3} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-3\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)}$.

Correction 5.

❀❀ **1.** **(a)** $1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $(1-i\sqrt{3})^5 = 2^5 e^{-i\frac{5\pi}{3}}$

$1 - i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1-i)^3 = \sqrt{2}^3 e^{-3i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$.

Donc $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3} = \dfrac{2^5}{2\sqrt{2}} \times \dfrac{e^{-i\frac{5\pi}{3}}}{e^{-i3\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{16}{\sqrt{2}} e^{i(-\frac{5\pi}{3}+\frac{3\pi}{4})} = \boxed{8\sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}}$.

Donc $z_n = \left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n = \boxed{(8\sqrt{2})^n e^{-i\frac{11n\pi}{12}}}$.

z_n est un réel positif si et seulement si $-\frac{11n\pi}{12} = 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $-\frac{11n\pi}{12} = 2k\pi$ soit $n = -\frac{24k}{11}$.

On recherche n entier, donc les valeurs de k qui conviennent sont les multiples de 11, donc <u>les valeurs de n qui conviennent sont les multiples de 24</u>.

(b) $-2\sqrt{3} + 2i = 4(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 4e^{5i\frac{\pi}{6}}$

Donc $\arg(-2\sqrt{3}+2i) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Or $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi] = -\theta\ [2\pi]$.

Donc $\arg\left(\frac{-2\sqrt{3}+2i}{\overline{z}}\right) = \frac{5\pi}{6} - (-\theta)\ [2\pi] = \boxed{\frac{5\pi}{6} + \theta\ [2\pi]}$.

2. ***Attention :*** *AB est une longueur (donc un nombre réel positif), $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur, $z_{\overrightarrow{AB}}$ est un nombre complexe : ces objets ne sont pas interchangeables !*

(a) <u>VRAI :</u> $z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = 1 - i\sqrt{3} - (\sqrt{3}+i) = 1 - \sqrt{3} - i(\sqrt{3}+1)$

donc $AD = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (1-\sqrt{3})^2}$.

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -\sqrt{3} - 1 + i(1-\sqrt{3})$

donc $BC = \sqrt{(-\sqrt{3}-1)^2 + (1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (1-\sqrt{3})^2} = AD$

(b) <u>VRAI :</u>

$$CD = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$AB = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{1-2\sqrt{3}+3+3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8-4\sqrt{3}}$$

Or
$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+2)AB &= \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}\sqrt{8-4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(3+2\times 2\times\sqrt{3}+4)(8-4\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{(7+4\sqrt{3})(8-4\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{54-28\sqrt{3}+32\sqrt{3}-16\times 3} \\ &= \sqrt{8+4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(c) <u>VRAI :</u> $z_{\overrightarrow{AC}} = -2\sqrt{3}$ et $z_{\overrightarrow{BD}} = -i2\sqrt{3}$

Donc (AC) est parallèle à l'axe des abscisses et (BD) à l'axe des ordonnées, donc elles sont bien perpendiculaires.