Correction du DM n° 19

Exercice 1.

- $$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{9n^2+3n-1} - 3n \\ &= \frac{(\sqrt{9n^2+3n-1}-3n)(\sqrt{9n^2+3n-1}+3n)}{\sqrt{9n^2+3n-1}+3n} \\ &= \frac{9n^2+3n-1-(3n)^2}{\sqrt{9n^2+3n-1}+3n} \\ &= \frac{3n-1}{\sqrt{9n^2+3n-1}+3n} \end{aligned}$$

  ⋆ $3n-1 \sim 3n$.

  ⋆ $9n^2+3n-1 \sim 9n^2$ donc par application de la puissance $\frac{1}{2}$, $\sqrt{9n^2+3n-1} \sim 3n$ et puisque $3n \sim 3n$ aussi, par addition avec le même équivalent, $\sqrt{9n^2+3n-1}+3n \sim (1+1)3n$ soit $\sqrt{9n^2+3n-1}+3n \sim 6n$.

  Ainsi, par quotient d'équivalents, $u_n \sim \dfrac{3n}{6n}$ soit $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2}}$.

- v_n :
  Par théorème des croissances comparées, $\ln(n) = o(\sqrt{n})$ donc $\ln(n) - \sqrt{n} \sim -\sqrt{n}$.
  D'autre part, $3n^7 - 7n^2 + 1 \sim 3n^7$ (polynôme).
  Donc par quotient $v_n \sim \dfrac{3n^7}{-\sqrt{n}} \sim \boxed{-3n^{6,5}}$

- w_n : par théorème des croissances comparées, $e^{3n} + n \sim e^{3n}$.
  Et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $5 + \frac{1}{n} \sim 5$.
  Donc par produit, $\boxed{w_n \sim 5e^{3n}}$.

Exercice 2.

1. La semaine n, le consommateur a choisi exactement un parmi les trois desserts, donc A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, donc en appliquant la formule des probabilités totales :
$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \quad (*)$.
Or $\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité qu'il choisisse le dessert A la semaine $n+1$ sachant qu'il l'a déjà choisi la semaine n, ce qui, d'après l'énoncé, fait $\frac{1}{3}$.
Pour $\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1})$, on suppose qu'il a choisi le dessert B la semaine n, donc d'après le deuxième point de l'énoncé, la probabilité qu'il choisisse le dessert A la semaine d'après est $\frac{1}{3}$.
Et $\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) = 0$ car lorsqu'il a choisi le dessert C une semaine, il n'en prend plus jamais d'autre.
Ainsi, en remplaçant dans $(*)$, on a bien $\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)}$.
De même, avec la formule des probabilités totales dans le même système complet d'événements :
$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= P(A_n)\times 0 + P(B_n)\times \tfrac{2}{3} + P(C_n)0 \text{ d'après les indications de l'énoncé.} \end{aligned}$$
$\boxed{P(B_{n+1}) = \dfrac{2}{3}P(B_n)}$.

De même, $\boxed{P(C_{n+1}) = \dfrac{2}{3}P(A_n) + P(C_n)}$.

2. On cherche une matrice M telle que $\begin{pmatrix} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$

Autrement dit $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n) \\ \frac{2}{3}P(B_n) \\ \frac{2}{3}P(A_n) + P(C_n) \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$

La matrice $\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ convient.

3. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $U_n = \frac{1}{3}M^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n=1$, $U_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{P}(A_1)\\\mathbf{P}(B_1)\\\mathbf{P}(C_1)\end{pmatrix}$.

Or le consommateur choisit de manière équiprobable entre les trois desserts le jour 1, donc $U_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Et $\frac{1}{3}M^{1-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}I\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $U_k = \frac{1}{3}M^{k-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a $U_k = \frac{1}{3}A^{k-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ par hypothèse de récurrence, donc, en multipliant chaque membre par M à gauche, on obtient $MU_k = M\frac{1}{3}M^{k-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}MM^{k-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}M^{k+1-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, $MU_k = U_{k+1}$, donc $U_{k+1} = \frac{1}{3}M^{k+1-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. CQFD

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ U_n = \frac{1}{3}A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

4. Soit $\mathcal{P}(n)$ la formule $M^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^n\\\left(\frac{2}{3}\right)^n\\3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n=0$, $M^0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Et $\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^0\\\left(\frac{2}{3}\right)^0\\3-2\left(\frac{2}{3}\right)^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Donc l'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $M^k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\\left(\frac{2}{3}\right)^k\\3-2\left(\frac{2}{3}\right)^k\end{pmatrix}$.

On va montrer qu'alors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$M^{k+1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = MM^k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\\left(\frac{2}{3}\right)^k\\3-2\left(\frac{2}{3}\right)^k\end{pmatrix}$ par hypothèse de récurrence.

Or $M\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\\left(\frac{2}{3}\right)^k\\3-2\left(\frac{2}{3}\right)^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\\left(\frac{2}{3}\right)^k\\3-2\left(\frac{2}{3}\right)^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k+3-2\left(\frac{2}{3}\right)^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\\3+\left(2-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k\end{pmatrix}$

Donc $M^{k+1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\\ 3-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\end{pmatrix}$.
Et $\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2\times\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$.
Donc on obtient bien la formule voulue.

Conclusion : Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, M^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\\ 3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\end{pmatrix}}$.

5. Donc $\forall n\geqslant 1$, $U_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\ 3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{P(A_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ et } \mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ et } \mathbf{P}(C_n) = \frac{1}{3}\left(3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}$.

Or $-1<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ donc par multiplication par $\frac{1}{3}$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0}$

Et de la même façon, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}(B_n) = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}(C_n) = 1}$.